UNIVERSITE NATIONALE DU BENIN
FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES
ECONOMIQUES ET POLITIQUES (FASJEP)

3ème Année de Sciences Economiques
Option : Sciences de Gestion
Filières : Toutes

TECHNIQUES QUANTITATIVES APPLIQUEES A LA GESTION
(Recherche opérationnelle – *Quantitatve management*)

Document disponible sur internet à l'adresse ci-dessous

http://www.softlabo.org/TheMag/Cours/TQAGSE3.PDF

Disclaimer : Ce document et fourni « tel quel ». Des mises à jour peuvent être disponibles.

© 1996 - Magloire LANHA

SYLLABUS

I - OBJECTIF

I - 1 Objectif Général

Le cours de Techniques Quantitatives Appliquées à la Gestion a pour objectif général de systématiser le raisonnement de l'étudiant dans la prise de décision de gestion. Il s'agit de :
- modéliser le processus de décision
- de déterminer les outils appropriés
- de résoudre le problème de gestion
- de commenter la solution en précisant ses limites.

Le flou artistique ou *flair* qui présidait à la prise de décision est ainsi supprimé, sinon minimisé grâce à une exploration systématique des opportunités et leurs conséquences. Même en avenir incertain, le gestionnaire dispose de moyens qui lui permettent de prendre une décision éclairée par la connaissance des états de la nature et des coûts d'opportunités de la décision.

I - 2 Objectif Spécifique

L'objectif spécifique est la maîtrise des outils modernes utilisés dans la résolution des problèmes de gestion dans l'entreprise. Ces outils sont classés selon le genre de problème. L'objectif spécifique de chaque chapitre est précisé au début du cours. Il s'agit de :
- détecter les types de problèmes dont la formalisation nécessite l'outil développé dans le chapitre,
- étudier les fondements théoriques de l'outil
- appliquer l'outil sur un ou plusieurs exemples détaillés
- faire une ouverture sur les problèmes ou solutions connexes.

II - METHODOLOGIE D'ENSEIGNEMENT

Chaque cours est organisé en 5 parties
1 - Présentation du concept et de ses fondements théoriques
2 - Un exemple introductif pris dans le domaine de la gestion
2 - Un exemple approfondi ou complexe
4 - Compléments théoriques et autres voies de recherches
5 - Exercices non corrigés à titre d'entraînement à la modélisation et à la prise de décision.

Les étudiants recevront des polycopiés du cours. L'essentiel sera présenté au tableau par le professeur. Les étudiants pourront poser toutes les questions qui leur semblent utiles pour maîtriser les concepts. Au début de chaque cours, une séance d'une dizaine de minutes sera réservée pour des questions ponctuelles sur le cours précédent.

Une séance de TD est prévue après 3 séances de cours soit une fois par mois. Les étudiants auront reçu les exercices à l'avance et les auraient traités dans un cahier d'exercice. La présence aux cours et aux TD est vivement recommandée, mais demeure facultative.

III - EVALUATION

L'évaluation est faite conformément aux règles en vigueur à la Faculté. L'examen sera fait à l'écrit sur des copies anonymes.

IV - CONTENU DU COURS (Cf. ci-après)

V - BIBLIOGRAPHIE (Cf. ci-après)

© 1996 - Magloire LANHA

- BIBLIOGRAPHIE

1 - Ouvrage récapitulatif (Ouvrage de base)

- AZOULAY P., DASSONVILLE P., Recherche Opérationnelle de Gestion, Collection Themis-Gestion, Presses Universitaires de France (PUF), Paris 1976,
  Tome 1 : Recherche opérationnelle en environnement certain
  Tome 2 : Recherche opérationnelle en environnement incertain

2 - Ouvrages de Recherche Opérationnelle et de mathématiques économiques

- **ARCHER J., GARDELLE J.**, Programmation Linéaire, Dunod Décision, 1983
- **AXELROD Robert**, Donnant Donnant : Théorie du Comportement coopératif, Nopuveaux Horizons/Odile Jacob, Paris 1992
- **BRABB Georges J.**, Introduction to Quantitative Management, Holt, Rinehart and Winston, New York 1970
- **CHIANG Alpha C.**, Fundamental Methods of Mathematical Economics, McGraw-Hill, New-York, 1984, Programmation mathématique (Part.6) : Programmation Linéaire (Ch.19),
- **DEBAZEILLE Gérard**., Exercices et Problèmes de Recherche Opérationnelle, Dunod, Paris 1976
- **FOURASTIE Jacqueline**, Exerces de mathématique appliquées à l'économie avec solutions et rappels de cours, Collection «Module», DUNOD, 3ème édition, Paris 1987
- **GOUJET C., NICOLAS C.**, Mathématiques appliquées : Probabilités - Initiation à la Recherche Opérationnelle, Collection BTS Comptable - IUT de Gestion
- **HELARY J.M., PEDRONO R.** , Recherche Opérationnelle, Exerces corrigés, Hermans, Paris, 1983,
- **KAUFMANN A. FAURE R.**, Invitation à la recherche opérationnelle, Dunod Entreprise, Paris 1987
- **THIREZ Hervé**, Initiation au Calcul économique, Collection Economie-Module, DUNOD, Paris 1984
- **THIREZ Hervé**, Comprendre et Utiliser les modèles de gestion Collection Décision-Gestion, DUNOD, Paris 1986
- **THIMONIER Claude**, Cours de Mathématiques, Expertise comptable, nouveau régime (DPECF-DECF) - BTS Comptabilité Gestion - BTS Services informatiques Editions Scientifiques et Juridiques Paris 1999
- **VARIAN Hal R.**, Introduction à l'analyse microéconomique, Nouveaux horizon/De Boeck Université, Bruxelles 1992 (Chapitre 26 - La théorie des jeux

3 - Ouvrages de gestion appliquant les techniques quantitatives

- BARBOT A., GOURVEST A., Préparation au DECF, Epreuve N° 7, : Contrôle de gestion, Exercice, Vuibert Compta, Vuibert, Paris 1990, 189 pages. Chapitre 3 : Le simplexe

- **DARBELET M., et LAUGINIE J.M.**, Economie d'Entreprise, Enseignement supérieur, Foucher, Paris 1988

Tome 1 : Programmation linéaire, Théorie des graphes (décisions séquentielles)
Tome 2 : Chapitre 5 : Les outils d'aide à la décision : Théorie des graphes (décisions séquentielles), Analyse multicritère, Décision en avenir incertain

- **KOUPHIN C., LANHA M.**, Comptabilité Analytique d'Exploitation et Gestion Prévisionnelle, Cotonou, 1991 : Cas N° 11 : Budget flexible : Aide à la décision, Cas N° 14 : Coût marginal, Cas N° 19 : Budget de Production - Programmation linéaire, Cas N° 20 : Budget des investissements, Evaluation multicritère, Cas N° 22 Etude économique et budgétaire des approvisionnements

- **VIZZAVONNA Patrice**, - Tome 3 : Etudes de cas corrigés de Gestion financière et d'évaluation des entreprises, Atol, Paris 1992
  Point mort, Seuil de rentabilité, Cas n° 6
  Gestion de stocks : cas n°7,8,9 - Formule de Wilson, Intervalle de confiance
  Programmation linéaire : cas n° 18 - résolution graphique, cas n° 19 - algorithme du simplexe,
  Théorie des graphes : cas n° 21,22 - PERT
  Théorie de Jeux et de la décision : cas n° 20 - décision multi-hypothèses, cas n° 23 - Critères de Laplace (Espérance mathématique) de Wald (MaxiMin : critère " pessimiste " et MaxiMax : critère optimiste), de Hurwicz (Pondération), de Savage (MiniMax)

4 - Ouvrages informatiques

- **Louis ABRAHAM**, Traitement des données au CPECEF, CLET-BANQUE, Paris 1986. Chapitre 5 : Tables de décision
- **FROT Pierrot**, 3 Systèmes experts en Turbo Pascal Utile, SYBEX 1990
- **REIX Robert**, Informatique appliquée à la gestion, FOUCHER, PARIS 1990
  Tome 2 - Arbre de décision (p.147) - Table de décision (p.150),
  Système Interactif d'aide à la Décision - SIAD (p.22)

 © 1996 - Magloire LANHA

INTRODUCTION AUX TECHNIQUES QUANTITATIVES DE GESTION

1 - Nécessité des techniques Quantitatives en Gestion

Le Gestionnaire est amené à prendre des décisions quotidiennement. Certaines concernent le court terme, d'autres le long terme. Celles-ci sont dites stratégiques. Les conséquences des erreurs de décision son graves.

Décider de produire 100 unités de bien périssable alors que la quantité pouvant être vendue dans le temps de péremption est de :

* 10 entraîne une **perte** de 90 unités non vendues
* 1000 entraîne un manque à gagner ou **coût d'opportunité** de 900 unités non vendues.

Cet exemple introductif montre qu'être en dessous peut être aussi grave qu'être au dessus de la “ bonne valeur ” dite **valeur optimale**. L'exemple expose aussi l'**asymétrie** entre selon la valeur décidée par rapport à la valeur optimale : alors que dans le premier cas il y a une **perte financière réelle** égale au coût de revient des 90 unités invendues, dans le second cas, la perte est “ **psychologique** ”, le bénéfice qu'on aurait pu gagner sur 900 unités. Cette asymétrie induit aussi des **comportements “ prudent s”** optimaux (Règle MiniMax en Théorie des jeux par exemple).

Les techniques quantitatives apportent au gestionnaire une méthode et des outils dans la prise de décision. La **méthode** est induite par la **modélisation**, puis la **formalistion** nécessaires à l'utilisation des méthodes quantitatives. Les **outils** sont les techniques utilisées pour résoudre le problème formalisé.

2 - Les étapes de la prise de décision rationnelle

La prise de décision rationnelle se fait par étapes ; certaines étapes étant parfois confondues selon le type de problème. Georges BRABB [ ] suggère les étapes ci-après :

<u>1 - Définir le problème</u>
Ex 1 : Combien faut-il produire ?
La définition du problème revient à indiquer un **objectif à atteindre**

Ex 2 : Le problème peut être défini autrement : Etant donné que chaque quantité produite rapporte un bénéfice de 10 F si elle est vendue ou une perte de 50 F (prix de revient) si elle n'est pas vendue, qu elle est la quantité à produire ?

<u>2 - Déterminer les hypothèses et/ou limitations qui affectent la solution</u>

Ex : La demande d'un bien est inconnue et aléatoire. Se référant à l'étude E...., on postule qu'elle suit une loi L de paramètres p.

Il est évident que dans ce cas, toute solution est automatiquement dépendante de la loi postulée, des paramètres choisis, des valeurs attribuées à ces paramètres....

<u>3 - Identifier les actions possibles</u>

Existe-t-il un intervalle de variation du nombre d'unités ? A quel ensemble appartiennent les solutions possibles. Dans l'exemple, la solution doit être entière.

<u>4 - Isoler le critère de décision</u>

Parfois il est facile de trouver un critère : Maximiser le bénéfice par exemple.
Mais parfois, sinon souvent plusieurs critères sont candidats et on ne peut en retenir un seul. C'est le cas *incertitude* où plusieurs critères sont proposés, chacun ayant sa part de logique : Espérance mathématique - critère “ pessimiste ” MaxiMin : - critère optimiste : MaxiMax - MiniMax - Pondération des critères ci-dessus par modulation des doses d'optimisme et de pessimisme.

<u>5 - Déterminer et comparer les possibilités</u>

Il faut résoudre le problème et analyser la solution. Y a-t-il une solution unique ou un ensemble de solutions ? Dans ce dernier cas, laquelle choisir en définitive ? La solution est-elle réaliste selon des critères qui n'ont pas été pris en compte dans la modélisation (le facteur humain ou sociologique par exemple) ?

<u>6 - Prendre la décision</u>
Ex : On va produire 50 unités.

<u>7 - Mettre en œuvre la décision</u>
On produit 50 unités

 © 1996 - Magloire LANHA

8 - Piloter les résultats de la décision (Monitoring)

Il faut évaluer les résultais réels obtenus par la mise en œuvre de la décision et déterminer leur incidence sur le processus même de décision. A l'expérience :
- si on admet que la demande suit une loi L, le paramètre n'est pas p mais q.
- le facteur humain doit être intégré au modèle comme contrainte que doit satisfaire la solution
- le prix de revient est de 48 F
- etc.

La prise en compte de ces faits nouveaux permet d'améliorer le modèle (processus d'apprentissage).

3 - La modélisation : du monde réel aux outils de décision

3.1 - Définition

La modélisation consiste à représenter le phénomène réel sous forme symbolique. Le symbolisme utilisé dans les Techniques Quantitatives de Gestion est le **symbolisme mathématique**. On parle aussi de **formalisation**.

Les 4 premières étapes ci-dessus font partie de la modélisation. Au cours ce ces étapes il faut :
- définir les variables, les constantes, les paramètres
- définir les objectifs en fonction des variables
- définir les contraintes en fonction des variables

Chacune de ces trois types de définition fait appel à la modélisation.

Dans le passage du réel au modèle, plusieurs niveaux d'abstraction entrent en jeu. On postule même plusieurs modèles (et non un seul).

3.2 Modèle quantitatif et Modèle qualitatif

3.2.1. Modélisation du quantitatif

Elle consiste à trouver un ensemble de définition des valeurs de la variable : ô, Ã, ou Ñ par exemple. La plupart des problèmes de gestion sont à variable entière alors que les outils sont à valeur continue. Lorsque la résolution du problème donne une solution non entière pour une variable entière par nature, faut-il considérer :
- qu'il n'y a pas de solution
- ou tronquer la solution à la valeur entière ? Dans ce cas l'arrondi se fera-t-il à la valeur
* la plus proche
* par défaut
* ou par excès ?

Exemple : Lorsque la solution mathématique X égale 2,5, combien d'avions faut-il produire ? 2 ou 3 avions ou ne pas en produire du tout (X=0) car 2,5 n'appartient pas à IN, l'ensemble de définition de X ?

Il n'y a pas de réponse a priori à ces questions. Il revient au modéliste de préciser à l'avance, les réponses dans le cas d'espèce.

3.2.2 Modélisation du qualitatif

L'attitude d'un individu face au risque d'un homme par exemple est une variable **qualitative.** Comment la formaliser ? En prenant un critère de décision optimiste ou pessimiste dans l'exemple 1, on modélise ainsi l'**attitude** de l'individu. La **logique binaire** puis la **logique floue** permettent de formaliser le qualitatif.

Attitude	**Valeur logique**	**Valeur absolue**
Pessimiste	0	X
Combinaison Convexe	α (avec $0 < \alpha < 1$)	$\alpha X + (1-\alpha) Y$
Optimiste	1	Y

α est ici le degré d'optimisme.

3.3 Modélisation du connu et de l'inconnu

3.3.1 Modélisation du connu

Le comportement du phénomène peut être connu. C'est le cas par exemple des "équations comptables" ou règles d'équilibre.

Exemple : Soit à répartir une quantité de bien entre trois centres en proportion α, β, λ inconnues.
- La règle d'épuisement exige que la somme des parties fasse l'unité :
$\alpha + \beta + \lambda = 1$.
- La faisabilité exige que la somme des parts soit inférieure ou égale à l'unité : $\alpha + \beta + \lambda \leq 1$.

© 1996 - Magloire LANHA

3.3.2 Modélisation de l'inconnu

Lorsque le phénomène ne suit pas une règle connue on essai de l'approximer par une loi.
Exemple y = f(X) où X est un vecteur de n composantes ou n-uplet.
$y = f(x_1, x_2,..., x_n)$
f peut être (approximée par) une fonction connue. Exemple : les arrivées des clients suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$ (arrivées par minutes). Si le paramètre est inconnu il faut encore construire un modèle pour le connaître ou l'estimer. Lorsque f est inconnue, on procède à son estimation. L'**Econométrie** est une principale source d'estimation des relations entre variables expliquées (dépendante, endogène) et explicatives (indépendante, exogène).

Note : *Compte tenu de son importance et de son étendue, l'Econométrie qui est aussi une technique quantitative de décision est étudiée en 4ème année.*

De manière schématique, l'économétrie peut nous édifier sur :

- la forme de la fonctionnelle : f est-elle une forme linéaire, exponentielle, logarithmique, ou à variables décalées dans le temps par exemple ?

- quelles sont les variables explicatives significatives (pertinentes) du phénomène ? Ex : $y = f(x_1, x_2, x_3)$
- quelles sont alors les valeurs des paramètres de la fonctionnelle ? Ex : dans la régression linéaire : $y = 2\ x_1,- 5x_2,+ x_3$ 2, -5 et 1 sont les coefficients des x_1, x_2, x_3, dans la composition du phénomène quantifié par y.

3.4 Modélisation du certain et de l'incertain

3.4.1 Modélisation du certain

La plupart des exemples de modélisation ci-dessus procèdent du certain. Le modèle est dit **déterministe**.

3.4.2 Modélisation de l'incertain

Dans la réalité, plusieurs phénomènes étudiés en gestion comportent un facteur **aléatoire**. Le nombre d'arrivées par minute, le nombre d'unités qui peuvent être vendues en une unité de temps, sont **incertains**. Ce sont des phénomènes **probabilistes**. On parle de processus **stochastique.** La **Statistique** et la **Probabilité** sont des branches des mathématiques appliquées qui apportent une aide pour formaliser ces phénomènes.

Pour modéliser l'incertain en **Finance**, on utilise le concept d'**états de la nature.** Ex : S'il pleut au cours d'une période, le revenu de l'action d'une entreprise produisant des parapluies sera de 20 ; sinon il sera de 5.

Etat s de la nature	**Revenu de l'action**	**Probabilité de réalisation**
S1 : Il pleut au cours de la période	20	β
S2 : Il ne pleut pas au cours de la période	5	$1 - \beta$

En incertitude la prise de décision comprend donc un **risque**.

4 - Typologie des outils quantitatifs de décision

Les techniques quantitatives de gestion sont nombreuses. Dans ce cours, les outils à étudier sont :

Titre 1: Programmation Linéaire (PL)
Titre 2 : Théorie des Graphes (Théorie des Réseaux)
Titre 3 : Théorie des Jeux
Titre 4 : Phénomènes d'attente
Titre 5 : Gestion des stocks

 © 1996 - Magloire LANHA

Titre 1: Programmation Linéaire (PL)

Chapitre 1 : Introduction à la Programmation Linéaire

1. Exemples introductifs

1.1 - Maximisation

(Exercice adapté de KOUPHIN C., LANHA M. [ ], Cas N° 19)

La firme MAGIX monte sous licence deux types d'ordinateurs compatibles IBM : le PT133 et le DX4100. Elle vous consulte pour lui résoudre un problème de décision économique. Dans une première étape, vous avez eu à recenser les informations suivantes.

Les ordinateurs sont montés dans la section Montage puis sévèrement testés dans la section Test. Il faut 4 heures pour monter le PT133 et 3 heures pour le DX4100. Le test du PT133 prend 2 heures tandis que celui du DX41000 n'en prend qu'une. La section montage ne peut travailler plus de 3.600 heures par an tandis que la section Test ne peut dépasser 1.400 heures d'activité. La firme MAGIX ne peut écouler plus de 500 PT133 ni plus de 1000 DX4100 par an. Elle réalise un bénéfice de $ 4.500 sur le PT133 et de $ 3.000 sur le DX4100.

L'étape suivante consiste à modéliser le problème sous forme mathématique

1.1.1 - Choix des variables : Soit X_1 la quantité de PT133
et X_2 celle de DX4100.

1.1.2 - Définition de la fonction économique et l'objectif

Bénéfice sur les PT133 : 4.500 X_1
Bénéfice sur les PT133 : 3.000 X_2

La fonction économique est le Bénéfice Total Z = 4.500 X_1 + 3.000 X_2

L'objectif est de maximiser le bénéfice total : Max Z = 4.500 X_1 + 3.000 X_2

1.1.3 - Spécification des contraintes :

Contraintes de signe : $X_1 > 0$, $X_2 > 0$.

Contraintes de temps dans la section Montage

X_1 unités de PT133 : 4 heures * X_1
X_2 unités de DX4100 : 3 heures * X_2

Le total: $4X_1 + 3X_2$ doit être inférieur ou égal aux disponibilités de 3.600

$$4X_1 + 3X_2 \leq 3.600$$

Contraintes de temps dans la section Test

En reprenant le raisonnement précédent, on trouve : $2X_1 + X_2 \leq 1.400$

Contrainte de commercialisation

$X_1 \leq 500$ et $X_2 \leq 1.500$

1.1.4 - Résumé du programme

Max Z = 4.500 X_1 + 3.000 X_2

Sous les contraintes :

4 X_1	**+**	**3 X_2**	$\leq$	**3.600**
2 X_1	**+**	**X_2**	$\leq$	**1.400**
X_1			$\leq$	**500**
		X_2	$\leq$	**1.000**
X_1			$\geq$	**0**
		X_2	$\geq$	**0**

1.1.5 Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \\ \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 3600 \\ 1400 \\ 500 \\ 1500 \end{pmatrix}$$

© 1996 - Magloire LANHA

1.2 - Minimisation

Extrait de AZOULAY P., DASSONVILLE P. [ ],
La société *Enzymer* fabrique des lessives et les commercialise en France. Une étude de marché a montré que l'impact des divers médias pouvait être caractérisé par le tableau suivant :

Media	Audience (millions)	Audience féminine (millions)	Coût par annonce (millier de F)
Télé	10	7	500
Radio	1	0,6	60
Presse	2	0,8	65

Le Directeur commercial d'*Enzymer* cherche à déterminer le budget de publicité minimum qui lui permette d'atteindre le public qu'il s'est fixé : au moins 20 millions de personnes dont au moins 14 millions de femmes.

Solution (partielle)

1.2.1 - Choix des variables

Soient x_i, le nombre respectif d'annonces dans le média de rang i
x_1 -> télé
x_2 -> radio,
x_3 -> presse.

1.2.2 - Formulation de la fonction économique et de l'objectif

Min Z = $500x_1 + 60x_2 + 65x_3$
Sous les contraintes :

$$\begin{array}{lllllll} 10x_1 & + & x_2 & + & 2\,x_3 & \geq & 20 \\ 7x_1 & + & 0{,}6x_2 & + & 0{,}8\,x_3 & \geq & 14 \\ x_1 & & & & & \geq & 0 \\ & & x_2 & & & \geq & 0 \\ & & & & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

1.2.3 Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 7 & 0{,}6 & 0{,}8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 24 \\ 14 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Définitions

2.1 - Définition mathématique

On appelle problème de programmation linéaire, tout problème dans lequel il s'agit d'optimiser (c'est-à-dire maximiser ou minimiser selon le cas) une fonction à plusieurs variables , linéaire par rapport à l'ensemble de ces variables, celles-ci devant satisfaire un ensemble de contraintes linéaires.
$\delta f/\delta x_i$ = cst pour i = 1,2,...n

2.2 - Typologie des formes de programmes linéaires

En ignorant les contraintes de signe,

2.2.1 Forme canonique : $AX \leq B$ ou (exclusif) $AX \geq B$

2.2.2 Forme standard : $AX = B$

2.2.1 Forme mixte :

En décomposant A en sous matrice de même nombre de colonnes que A en plusieurs groupes de lignes A_1, A_2, A_3, le programme est sous forme mixte s'il contient au moins deux des trois formes ci-dessous :

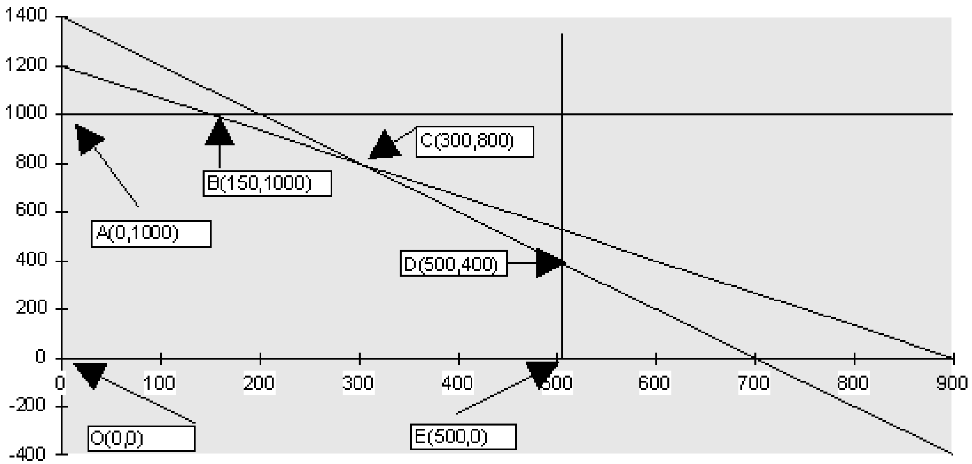
$A_1X \leq B_1$
$A_2X = B_2$
$A_3X \geq B_3$

© 1996 - Magloire LANHA

Chapitre 2 : Résolution manuelle des PL

1. Résolution graphique : cas où il y a 2 variables de choix

1.1 - Maximisation : Cas MAGIX



1.1.1 Méthode "algébrique"

Il faut rechercher les coordonnées précises des sommets du polyèdre convexe et évaluer Z à chacun des sommets : Z= 4500 X_1 + 3000 X_2

O (0,0) => Z(O) = 0
A(0,1000) => Z(A)= 3.000.000
B(150,1000) => Z(B)= 3.675.000
C(300,800) => Z(C)= 3.750.000 Max
D(500,400) => Z(D)= 3.450.000
E(500,0) => Z(E)= 2.250.000

Le maximum de bénéfice est obtenu pour une production de X_1=300 (PT133) et X_2=800 (DX4100), soit un bénéfice de $ 3.750.000.

1.1.2 Méthode "graphique"

Il faut tracer la droite associée à la ligne de niveau Z = 4.500 X_1 + 3.000 X_2 = k pour k=0. et la déplacer parallèlement à elle-même en l'éloignant de l'origine jusqu'à obtenir une tangente à un sommet du polyèdre convexe. Une telle tangente peut :

- être unique : solution unique
- ne pas exister : pas de solution
- être un segment de droite : une infinité de solutions.

1.2 - Minimisation : Cas Enzymer (à traiter à titre d'exercice)

2. Algorithme de simplexe : Méthode des tableaux ou du pivot

2.1 - Principes de base

- Méthode développée par Dantzig
- Principe : connaissant une solution de base (réalisable donc), rechercher de façon itérative, une solution améliorée (ΔZ>0 pour un maximum, ΔZ<0 pour un minimum), jusqu'à l'optimum.
- Nécessité de la connaissance d'une solution de base. Deux méthode seront étudiées pour obtenir une solution de base : méthode du programme auxiliaire et méthode des pénalités.
- Forme simpliciale : Un programme est dit sous forme simpliciale si :
- elle est sous forme standard
- et les constantes du second membre sont toutes positives

Le programme doit être mis sous forme simpliciale avant l'utilisation de l'algorithme de simplexe.

2.2 - Exposé de la méthode à partir du cas de la firme MAGIX

2.2.1 - Mise sous forme standard

Les inéquations sont transformées en équations par l'introduction de **variables d'écart positives**.

Max Z = 4.500 X_1 + 3.000 X_2
sous

X_1	X_2	e_1	e_2	e_3	e_4	Signe	Bk
$4X_1$	$+ 3X_2$	$+ e_1$				=	3.600
$2X_1$	$+ X_2$		$+e_2$			=	1.400
X_1				$+e_3$		=	500
	X_2				$+e_4$	=	1000

2.2.2 - Application (Voir page entière en annexe)

La première ligne du tableau exprime les manipulations de Gauss effectuées.

2.2.3 - Variable entrante et critère d'arrêt et d'optimalité

- Pour un **maximum**, **la variable entrante** est celle qui, dans le tableau, a l'élément strictement **positif** le plus grand sur la ligne de la fonction économique (appelé ligne Z ci-après). Les valeurs des variables de la base étant toujours positives, celle ayant le coefficient positif de Z le plus élevé **augmentera** plus que les autres la valeur de la fonction économique.

* Si tous les éléments de la ligne Z sont **négatifs** ou nuls, le programme est optimal :

  - si les seuls éléments nuls de la ligne Z correspondent aux variables de base (ou d'écart), alors le **maximum est unique**. C'est le cas lorsque la ligne de niveau la plus **éloignée** de l'origine est tangente *en un seul sommet* du polyèdre convexe.

  - sinon, il y a une **infinité de solutions**, car n'importe quelle autre variable ayant un 0 pour la ligne Z peut (ou aurait pu) entrer à la place d'une variable de base affectant les valeurs des autres variables de base tout en gardant Z constant. C'est le cas lorsque la ligne de niveau la plus éloignée de l'origine est confondue à tout un segment de la frontière du polyèdre convexe.

* S'il existe un élément de la ligne Z strictement positif tel que les éléments de la colonne correspondante sont tous négatifs ou nuls, le problème n'a pas de solution optimale finie, *car il ne peut pas avoir de variable sortante* (Cf. ci-dessous). Ce cas "normalement" exclus du fait même de la nature des programmes économiques se produit quand il y a erreur de modélisation.

* S'il existe un ou plusieurs éléments de la ligne Z strictement **positifs**, on poursuit le processus itératif, jusqu'à aboutir à l'un des deux cas ci-dessus.

- Pour un **minimum**, **la variable entrante** est celle qui dans le tableau a le coefficient (sur la ligne Z) strictement **négatif** le plus grand en valeur absolue. Les valeurs des variables de la base étant toujours positives, celle ayant le coefficient négatif de Z le plus élevé en valeur absolue **diminuera** plus que les autres la valeur de la fonction économique.

* Si tous les éléments de la ligne Z sont **positifs** ou nul, le programme est optimal :

  - si les seuls éléments nuls de la ligne Z correspondent aux variables de base (ou d'écart), alors le **minimum est unique**. C'est le cas lorsque la ligne de niveau la plus **proche** de l'origine est tangente *en un seul sommet* du polyèdre convexe.

  - sinon, il y a une **infinité de solutions**, car n'importe quelle autre variable ayant un coefficient nul sur la ligne Z peut (ou aurait pu) entrer à la place d'une variable de base affectant les valeurs des autres variables de base tout en gardant Z constant. C'est le cas lorsque la ligne de niveau la plus proche de l'origine est confondue à tout un segment de la frontière du polyèdre convexe.

* S'il existe un élément de la ligne Z strictement négatif tel que les éléments de la colonne correspondante sont tous **négatifs** ou nuls, le problème n'a pas de solution optimale finie, *car il ne peut pas avoir de variable sortante* (Cf. ci-dessous). Ce cas "normalement" exclus du fait même de la nature des programmes économiques se produit quand il y a erreur de modélisation.

* S'il existe un ou plusieurs éléments de la ligne Z strictement **négatifs**, on poursuit le processus itératif, jusqu'à aboutir à l'un des deux cas ci-dessus.

2.2.3 - Variable sortante

La variable sortante est toujours celle qui correspond à la **valeur finie positive** la plus petite de la colonne B/k "colonne entrante", qu'il s'agisse de **maximiser ou** de **minimiser** la fonction économique. Comme ce rapport doit toujours être strictement positif, on comprend pourquoi **il ne peut avoir de variable sortante**:

- dans le cas du maximum, «S'il existe un élément de la ligne Z strictement positif tel que les éléments de la colonne correspondante sont tous négatifs ou nuls» (Cf. ci-dessus).

- dans le cas du minimum, «S'il existe un élément de la ligne Z strictement négatif tel que les éléments de la colonne correspondante sont tous négatifs ou nuls»

2.2.4 Pivot et transformation de Gauss

Le pivot est la valeur située à l'intersection de la variable entrante et la variable sortante de la base. Le nouveau tableau est construit en rendant unitaire le pivot et en faisant les transformations de Gauss nécessaires pour avoir partout 0 dans la colonne pivot y compris sur la ligne Z de la fonction économique (Cf. application au cas MAGIX).

2.3 - Recherche d'une solution de base

© 1996 - Magloire LANHA

La formulation de certains programmes est telle qu'il n'y a pas de solution de base évidente. C'est le cas surtout pour les problèmes de **minimisation** et de façon générale, quand des contraintes sont sous forme soit d'**égalité**, soit sous forme de **supériorité**. Les programmes de maximisation peuvent donc aussi être concernés. Deux méthodes manuelles sont couramment utilisées pour trouver une solution de base réalisable.

2.3.1 - Méthode du programme auxiliaire ou résolution en deux étapes
On construit un programme auxiliaire avec des **variables artificielles,**
- un objectif auxiliaire ne contenant que les variables artificielles ai
- on minimise le programme auxiliaire : Min Σ ai
Le programme obtenu est une solution de base réalisable. On reprend alors les coefficients originaux de la fonction économique et on résout le programme dont l'objectif peut être de minimiser ou de maximiser la fonction économique.

Application : Cas AZOULAYVILLE (Min)
Min Z = $3x_1 + 2x_2 + 5x_3$
sous les contraintes
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 15$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 10$$

Etape 0.1 : Mise sous forme standard
Min Z = $3x_1 + 2x_2 + 5x_3$
sous les contraintes
$x_1 \geq 0$, $x2 \geq 0$, $x3 \geq 0$, $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - e_1 = 15$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 - e_2 = 10$$

Il n'y a pas de solution de base réalisable.

Etape 0.2 : Introduction des variables artificielles
Note : Il n'est nécessaire d'introduire de variable artificielle (positive) que dans les cas où la contrainte est sous forme d'égalité (=) ou de supériorité (≥). Dans la nouvelle équation, la variable artificielle est affectée du signe du second membre..

Min Z = $3x_1 + 2x_2 + 5x_3$
sous les contraintes
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - e_1 + a1 = 15$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 - e_2 + a_2 = 10$$

Il existe une solution de base réalisable, mais qui ne contient que des variables artificielles. On peut commencer l'étape 1 de l'algorithme de simplexe.

Etape 1 : Construction et résolution du programme auxiliaire

Min Z = $a_1 + a_2$
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $e_1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - e_1 + a_1 = 15$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 - e_2 + a_2 = 10$$

A l'étape 1, on cherche toujours à <u>minimiser</u> la fonction objectif que l'objectif initial soir de type max ou min. La résolution est faite en annexe.

2.3.2 - Méthode des pénalités

Rappel : Il n'est nécessaire d'introduire de variable artificielle (toujours positive) que dans les cas où la contrainte est sous forme d'égalité (=) ou de supériorité (≥). Dans la nouvelle équation, la variable artificielle est affectée du signe du second membre.

Pour un Max, on construit un objectif Z = CX - ΣMa_i. M est une constante positive arbitrairement grande qui tend à réduire la fonction économique, tant que les variables artificielles sont dans la base. On dit qu'on pénalise la fonction objectif, d'où le nom de la méthode.

Pour un Min, on construit un objectif Z = CX + ΣMa_i. M est une constante positive arbitrairement grande qui tend à augmenter la fonction économique, tant que les variables artificielles sont dans la base. On dit qu'on pénalise la fonction objectif, d'où le nom de la méthode.

Application : Cas AZOULAYVILLE : Min
Min Z = $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + Ma_1 + Ma_2$
sous les contraintes
$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $e1 \geq 0$, $e_2 \geq 0$, $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - e_1 + a_1 = 15$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 - e_2 + a_2 = 10$$

avec M arbitrairement grand.
(Résolution en annexe)

<u>3. Travaux de post-optimisation et interprétation économique</u>
Ces études seront faites au chapitre 3 à travers les rapports du Solveur (Rapport des réponses, Rapport de la sensibilité, Rapport des limites) et au chapitre 3 lors de l'étude des propriétés du dual en rapport avec le primal et de l'interprétation économique du dual.

 © 1996 - Magloire LANHA

RESOLUTION DU PROGRAMME MAGIX PAR LA METHODE DU SIMPLEXE : Approche Tableaux

Etape 1 : La base est constituée des seules variables d'écart

Formule	Base	x1	x2	e1	e2	e3	e4	R	R/Bk
L1	e1	4	3	1	0	0	0	3 600	900
L2	e2	2	1	0	1	0	0	1 400	700
L3	e3	1	0	0	0	1	0	500	500
L4	e4	0	1	0	0	0	1	1 000	#DIV/0!
L5	Fonction éco.	4500	3000	0	0	0	0	0	**Sommet O(0,0)**

Le vecteur sortant a toujours le Min des R/Bk>0

Z=0

Pivot

x1 entre dans la base et e3 en sort

Pour un Max la col. entrante est déterminée par ce cj le plus fort

Etape 2 : Une variable de choix entre dans la base

Formule	Base	x1	x2	e1	e2	e3	e4	R	R/Bk
L1'=-4*L3+L1	e1	0	3	1	0	-4	0	1 600	533.333333
L2'=-2*L3+L2	e2	0	1	0	1	-2	0	400	400
L3'=L3/Pivot	**x1**	1	0	0	0	1	0	**500**	#DIV/0!
L4'=L4	e4	0	1	0	0	0	1	1 000	1000
L5'=-4500L3+L5	Fonction éco.	0	3000	0	0	-4500	0	**- 2 250 000**	**Sommet E(500,0)**

Z=2.250.000

x2 entre dans la base et e2 en sort

Pivot

Z est la valeur opposée de celle du tableau

Etape 3 : Une seconde variable de choix entre dans la base

Formule	Base	x1	x2	e1	e2	e3	e4	R	R/Bk
L1'=-3*L2+L1	e1	0	0	1	-3	2	0	400	200
L2'=L2/Pivot	**x2**	0	1	0	1	-2	0	**400**	- 200
L3'=L3	**x1**	1	0	0	0	1	0	**500**	500
L4'=-L2+L4	e4	0	0	0	-1	2	1	600	300
L5'=-3000L2+L5	Fonction éco.	0	0	0	-3000	1500	0	**- 3 450 000**	**Sommet D(500,400)**

Z=3.450.000

e3 entre dans la base et e2 en sort

Pivot

Etape 4 : Une variable d'écart entre à nouveau dans la base car on est pas encore à l'optimum

Formule	Base	x1	x2	e1	e2	e3	e4	R	R/Bk
L1'=L1/2	e3	0	0	0.5	-1.5	1	0	200	
L2=2*L1+L2	**x2**	0	1	1	-2	0	0	**800**	
L3'=-L1+L3	**x1**	1	0	-0.5	1.5	0	0	**300**	
L4'=-2*L1+L4	e4	0	0	-1	2	0	1	200	
L5'=-1500L1+L5	Fonction éco.	0	0	-750	-750	0	0	**- 3 750 000**	**Sommet C(300,800)**

Tous les coefficients dans la fonction économique sont négatifs ou nul => Maximum

Z=3.750.000

Les coefficients nuls de Z correspondent uniquement aux variables de base : le maximum est unique

 © 1996 - Magloire LANHA

RESOLUTION DU PROGRAMME AZOULAYVILLE PAR LA METHODE DU PROGRAMME AUXILIAIRE (EN 2 ETAPES)											
Etape 1.a : La base est constituée des seules variables artificielles											Le vecteur
Formule	Base	x1	x2	x3	e1	e2	a1	a2	R	R/Bk	sortant a
L1	a1	1	1	2	-1	0	1	0	15	15	toujours le
L2	a2	1	3	1	0	-1	0	1	10	3.33333333	Min
L3	Faux Min	0	0	0	0	0	1	1			des R/Bk>0
Une variable de base doit avoir des coefficients nuls sur la ligne Z, d'où la transformation ci-dessous qui permet d'avoir des 0 pour a1 et a2											
L4=L3-L1-L2	Faux Min	-2	-4	-3	1	1	**0**	**0**	-25		
x2 entre dans la base et a2 en sort				Pour un Min la col. entrante est déterminée par le cj le plus négatif							
Etape 1.b											
Formule	Base	x1	x2	x3	e1	e2	a1		R	R/Bk	
L1'=-L2'+L1	a1	0.66667	0	1.667	-1	0.333333333	1		11.67	7	
L2'=L2/3	x2	0.33333	1	0.333	0	-0.33333333	0		3.333	10	
L3'=4*L2'+L3	Faux Min	-0.66667	**0**	-1.667	1	-0.33333333	0		-11.67		
x3 entre dans la base et a1 en sort					Inutile de garder la variable artificielle qui sort de la base						
Etape 1.c											
Formule	Base	x1	x2	x3	e1	e2			R	R/Bk	
L1"=L1'/(5/3)	x3	0.4	0	1	-0.6	0.2			7	35	
L2"=L1'/3+L2	x2	0.2	1	0	0.2	-0.4			1	-2.5	
L3"=(5/3)*L1'+L3	Faux Min	0	0	**0**	0	0			0		
Une solution de base réalisable est : x1=0, x2=1, x3=7 et Z=3*0+2*1+5*7=37											
On reprend alors le programme principal sur la ligne 4											
L4	Vrai Min	3	2	5	0	0			7		
Une variable de base doit avoir des coefficients nuls sur la ligne Z, d'où la transformation ci-dessous qui permet d'avoir 0 pour X3 qui rentre											
L5=L4-5L1"	Min	1	2	**0**	3	-1			-28		
Elle n'est pas encore optimale car la ligne Z contient une valeur négative qui peut réduire Z en rentrant dans la base.											
x3 sort et e2 entre dans la base											
Etape 2.a											
Formule	Base	x1	x2	x3	e1	e2			R	R/Bk	
L1'"=L1"/0.2	e2	2	0	5	-3	1			35		
L2'"=0.4*L1'"+L2	**x2**	1	1	2	-1	0			**15**		
L3'"=L1'"+L5	Min	3	2	5	0	0			7		
Tous les coeff. dans la fonction éco sont positifs ou nul => Minimum						Il faut remplacer les valeurs trouvées de xi dans le vrai objectif					
x1=x3=0 et x2=15 => Z = 2*15=30											

© 1996 - Magloire LANHA

RESOLUTION DU PROGRAMME DE MINIMISATION "AZOULAYVILLE" PAR LA METHODE DES PENALITES

Tableau 1 : La base est constituée des seules variables artificielles

Formule	Base	x1	x2	x3	e1	e2	a1	a2	R	R/Bk
L1	a1	1	1	2	-1	0	1	0	15	15
L2	a2	1	3	1	0	-1	0	1	10	3.33333
L3	Fonct. Eco.	3	2	5	0	0	+M	+M		

Le vecteur sortant a toujours le Min des R/Bk>0

Une variable de base doit avoir des coefficients nuls sur la ligne Z, d'où la transformation ci-dessous qui permet d'avoir des 0 pour a1 et a2

Formule	Base	x1	x2	x3	e1	e2	a1	a2	R
L4=L3-(L1+L2+L3)M	Fonct. Eco.	3-2M	2-4M	5-3M	M	M	0	0	-25M

x2 entre dans la base et a2 en sort

Pour un Min la col. entrante a le cj le plus négatif

Tableau 2 : x2 entre dans la base et a2 en sort

Formule	Base	x1	x2	x3	e1	e2	a1		R	R/Bk
L1'=-L2'+L1	a1	0.66666667	0	1.666667	-1	0.333333	1		11.666667	7
L2'=L2/3	x2	0.33333333	1	0.333333	0	-0.33333	0		3.3333333	10
L3'=L3-(2-4M)*L2'	Fonct. Eco.	(7-2M)/3	0	(13-5M)/3	M	(2-M)/3	0		(20-25M)/3	

x3 entre dans la base et a1 en sort

Inutile de garder la variable artificielle qui sort de la base

Tableau 3 : x3 entre dans la base et a1 en sort

Formule	Base	x1	x2	x3	e1	e2			R	R/Bk
L1'=L1/(5/3)	x3	0.4	0	1	-0.6	0.2			7	35
L2'=L1'/3+L2	x2	0.2	1	0	0.2	-0.4			1	-2.5
L3'=L3-L'1*(13-5M)/3	Fonct. Eco.	(-51+21M)/6	0	0	2.6	-0.2			(-21+10M)/3	

Solution de base utile: x1=0, x2 = 1, x3 = 7 et Z = 2*1 + 5*7 = 37

Tableau 4 : e2 entre dans la base et x3 en sort

Formule	Base	x1	x2	x3	e1	e2			R
L1'=L1/0.2	e2	2	0	5	-3	1			35
L2'=L2+0.4*L1'	x2	1	1	2	-1	0			15
L3'=L3+0.2*L1'	Fonct. Eco.	-8.1+21M/6	0	1	2	0			(10M)/3

Tous les coefficients de la ligne des Z sont positifs ou nul => Minimum **x1=x3=0 et x2=15 => Z = 2*15=30**

© 1996 - Magloire LANHA

Chapitre 3 : Résolution informatique des PL (Notions)

Lorsque le nombre de variables et/ou de contraintes devient important, les méthodes manuelles sont source d'erreur humaine : l'utilisateur de l'ordinateur est alors indispensable. Mais l'ordinateur nécessite un programme pour résoudre un problème donné. Le noyau du programme est la traduction d'un algorithme dans un langage précis. Les algorithmes informatiques sont souvent optimisés et ne sont pas nécessairement ceux appris dans le chapitre précédents. Ce sont notamment :
- méthode du produit factoriel de l'inverse
- méthode de décomposition de Dantzig et Wolfe
- méthode de Kantorovitch
- méthode du gradient Ragnar Frisch
- méthode de Newton
- etc.

On se bornera dans ce cours à résoudre un programme linéaire par un tableur, en l'occurrence le Solveur de Microsoft Excel. Le tableau ci-dessous décrit le programme de la firme MAGIX.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Coefficients de l'Objectif			Valeur Objectif		
2	Objectifs	4500	3000		-		
3	Variables	X	Y				
4	Valeurs				Contraintes	Sens	Bj
5	Contrainte 1	4	3		-	<=	3 600
6	Contrainte 2	2	1		-	<=	1 400
7	Contrainte 3	1	0		-	<=	500
8	Contrainte 4	0	1		-	<=	1 000
9							

- Au départ les cellules ci-après sont vides :
  - E2 : destinée à contenir la valeur optimale
  - B4,C4 : destinées à contenir les variables X et Y
  - E5,E6,E7,E8 : destinées aux valeurs des contraintes.

  Les solutions n'apparaissent qu'après la résolution.

- Formulation de l'objectif et du membre gauche de la contrainte
  - Contenu de la cellule objectif : **`E2=B2*B4+C2*C4`**
  - Contenu des cellules de contrainte

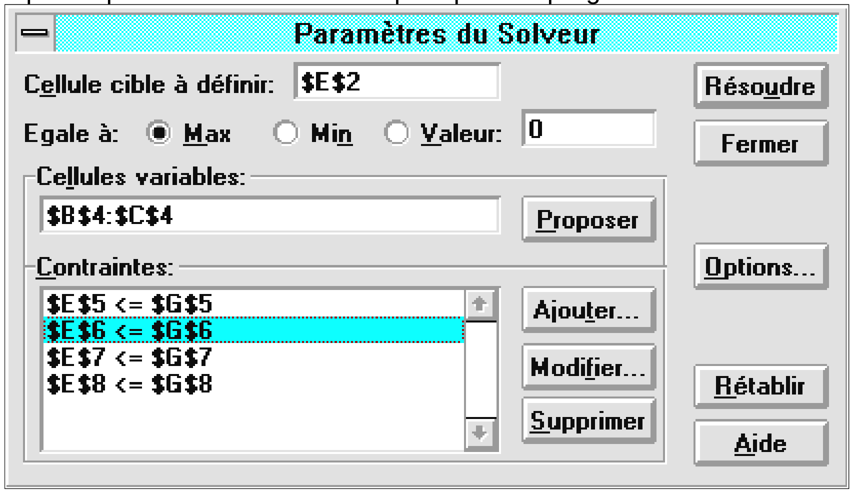
Contrainte 1 : `E5=B5*B4+C5*C4`
Contrainte 2 : `E6=B6*B4+C6*C4`
Contrainte 3 : `E7=B7*B4+C7*C4`
Contrainte 4 : `E8=B8*B4+C8*C4`

Résolution du programme avec le Solveur d'Excel

- Une fois le problème posé sous forme de tableau, il faut appeler le Solveur par le Menu : Outils - Solveur.

Si le Solveur n'apparaît pas dans le menu Outils, installez la macro complémentaire Solver.xla. Procédure : Menu - Outils - Macro complémentaire. Cochez la case Solveur.

On appelle ensuite le Solveur et on lui fournit les valeurs des paramètres. Remarquons que le Solveur ne résout pas que des programmes linéaires.

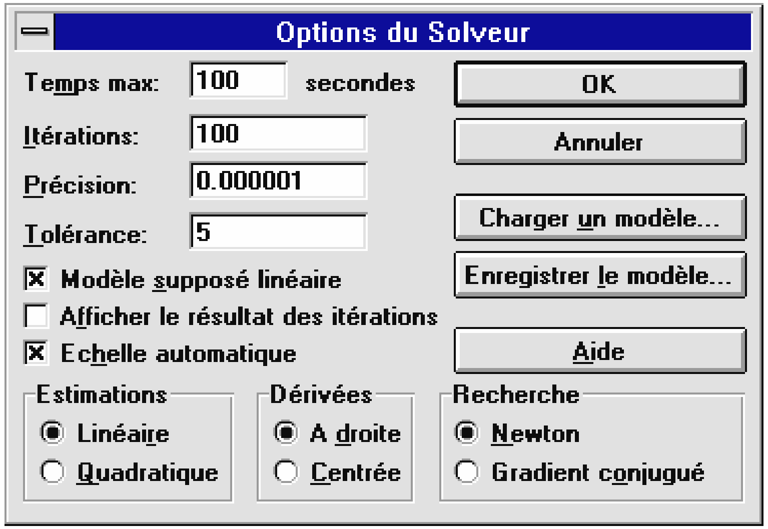


- Ecriture des contraintes dans le Solveur

Les cellules E5,E6,E7,E8 sont respectivement comparées avec les valeurs limites contenues dans G5,G6,G7,G8.

Les options ci-dessous permettent d'optimiser la recherche. La méthode de recherche sélectionnée ici est l'algorithme de Newton. Le modèle est linéaire.

 © 1996 - Magloire LANHA



- **Résoudre** le programme (Bouton **Résoudre**)

Après résolution, le Solveur inscrit les réponses dans les cellules qui lui ont été indiquées, à savoir ici X dans la cellule B4 et Y dans la cellule C4 et la valeur optimale dans la cellule E2.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Coefficients de l'Objectif			Valeur Objectif		
2	Objectifs	4500	3000		3 750 000		
3	Variables	X	Y				
4	Valeurs	300	800		Contraintes	Sens	Bj
5	Contrainte 1	4	3		3 600	<=	3 600
6	Contrainte 2	2	1		1 400	<=	1 400
7	Contrainte 3	1	0		300	<=	500
8	Contrainte 4	0	1		800	<=	1 000
9							

Le Solver propose également : 3 rapports fournis ci-après :
- Rapport des réponses
- Rapport de la sensibilité
- Rapport des limites

Microsoft Excel 5.0 Rapport des réponses
Feuille: [MAGIX.XLS]Firme Magix
Date du rapport: 30/1/96 3:10

Cellule cible (Max)

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
$E$2	Objectifs Valeur Objectif	-	3 750 000

Cellules variables

Cellule	Nom	Valeur initiale	Valeur finale
$B$4	Valeurs X	0	300
$C$4	Valeurs Y	0	800

Contraintes

Cellule	Nom	Valeur	Formule	Etat	Marge
$E$5	Contraintes	3600	$E$5<=$G$5	Lié[1]	0
$E$6	Contraintes	1400	$E$6<=$G$6	Lié	0
$E$7	Contraintes	300	$E$7<=$G$7	Non lié	200
$E$8	Contraintes	800	$E$8<=$G$8	Non lié	200

[1] Lié = Saturé

 © 1996 - Magloire LANHA

Microsoft Excel 5.0 Rapport de la sensibilité						
Feuille: [MAGIX.XLS]Firme Magix						
Date du rapport: 30/1/96 3:11						
Cellules variables						
		Valeur	Coût	Coefficient	Augmentation	Diminution
Cellule	Nom	finale	réduit	objectif	admissible	admissible
$B$4	Valeurs X	300	0	4500	1500	500
$C$4	Valeurs Y	800	0	3000	375	750
Contraintes						
		Valeur	Coût	Contrainte	Augmentation	Diminution
Cellule	Nom	finale	dual	à droite	admissible	admissible
$E$5	Contraintes	3600	750	3600	200	400
$E$6	Contraintes	1400	750	1400	133.333333	100
$E$7	Contraintes	300	0	500	1E+30	200
$E$8	Contraintes	800	0	1000	1E+30	200

Microsoft Excel 5.0 Rapport des limites
Feuille: [MAGIX.XLS]Firme Magix
Date du rapport: 30/1/96 3:11

Cellule	**Cible Nom**	**Valeur**
$E$2	Objectifs Valeur Objectif	3 750 000

Cellule	Variable Nom	Valeur	Limite inférieure	Cible	Limite supérieure	Cible
$B$4	Valeurs X	300	#N/A	#N/A	300	3750000
$C$4	Valeurs Y	800	#N/A	#N/A	800	3750000

 © 1996 - Magloire LANHA

Chapitre 4 : Dualité et Compléments

4.1 - Dualité

4.1.1 - Définition Programme dual

Soit le programme initial que nous désignerons **primal** ci-après :

Max $\underset{(1,n)(n,1)}{C\ X}$

sous

$\underset{(m,n)(n,1)}{A\ X} \leq \underset{(m,1).}{B}$

Le choix de la forme de l'un quelconque des est vecteur C et X (ligne ou colonne) arbitraire, mais chaque choix impose des formes pour la cohérence du produit matriciel. On peut aussi utiliser les vecteurs ou matrices transposées.

Son **dual** est par définition :

Min $\underset{(1,m)(m,1)}{U\ B}$

sous

$\underset{(1,m)(m,n)}{U\ A} \geq \underset{(1,n)}{C}$ ou $\underset{(n,m)(m,1)}{A'\ U'} \geq \underset{(n,1)}{C'}$ (Forme plus lisible (cf. tableau

4.1.2 - Exemple Programme dual : Cas MAGIX

PRIMAL	DUAL
Max 4500x1 + 3000x2	Min 3600u1 + 1400u2 + 500u3 + 1000u4
4x1 + 3x2 ≤ 3600	4u1 + 2u2 + 1u3+ 0u4 ≥ 4500
2x1 + 1x2 ≤ 1400	3u1 + 1u2 + 0u3 + 1u4 ≥ 3000
1x1 + 0x2 ≤ 500	
0x1 + 1x2 ≤ 1000	
xi ≥0, i=1,2	ui ≥0, i=1,4

4.1.3 - Propriétés

- le dual du dual est le primal
- le dual d'un programme de Maximisation est le primal d'un programme de Minimisation et réciproquement.
- les variables primales et duales sont de même signe : X≥ 0 <=> U ≥ 0
- les sens des inégalités sont inversés : AX≤B <=> UA ≥ C
- le nombre de contraintes (autres que celles de signe) du primal est égal au nombre de variables du dual
- le nombre de variables du primal est égal au nombre de contraintes (autres que celles de signe) du dual.

Utile : Ainsi, si un problème comporte n>2 variables mais m<3 contraintes, son dual pourrait être résolu graphiquement grâce aux théorèmes ci-dessous.

Exercice : Ecrire les duaux des cas Max(Enzymer) et Min(AZOULAYVILLE)

4.1.4 - Théorèmes dans le cas de PL sous forme canonique

Théorème 1 : Deux problèmes duaux ont la même valeur optimale de la fonction économique lorsque l'optimum existe.

Définition : Une contrainte est dite **saturée** lorsque la variable d'écart qui lui est associée est nulle à l'optimum. (Cf. Cas MAGIX, Rapport de sensibilité, Chapitre 3).

Théorème 2 : Si pour une solution optimale d'un programme linéaire une contrainte n'est pas saturée, alors la valeur optimale (duale) correspondante est nulle. La réciproque n'est pas (nécessairement) vraie.

Corollaire du Théorème 2 : Si la valeur optimale d'une variable n'est pas nulle, alors la contrainte duale correspondante est saturée pour la solution optimale. Le corollaire est très **utile** pour résoudre un programme à partir de la solution de son dual.

4.1.5 - Application, Utilité et Interprétation économique

Exemple : Coût marginal et Prix des facteurs de production

Un industriel dispose de deux machines M1 et M2 pour fabriquer deux biens A et B. Pour fabriquer une unité du bien A, il faut utiliser M1 durant 3 heures et M2 durant 5 heures. Pour fabriquer une unité du bien B, il faut utiliser M1 durant 5 heures et M2 durant 2 heures. Compte tenu des contraintes techniques, la machine M1 ne peut fonctionner plus de 15 heures par jour et M2 plus de 10 heures par jour. A est vendu 5 F l'unité et B 3F l'unité.

1- Ecrire le programme optimal de l'industriel, puis son dual.
2 - Rédiger un énoncé motivé pour le dual.
3 - Résoudre le primal.
4 - En déduire la solution du dual.

© 1996 - Magloire LANHA

Résolution du dual MAGIX à partir du primal

1 - Utilisation du **Théorème 2**

Si pour une solution optimale d'un programme linéaire une contrainte n'est pas saturée, alors la valeur optimale (duale) correspondante est nulle. En terme économique, par exemple, si un bien est abondant (il n'y en a plus qu'on ne peut utiliser efficacement), son coût marginal (une heure de location supplémentaire) considéré comme son prix d'équilibre (la variable duale associée) est nul.[2]

A l'optimum, les contraintes N° 3 et 4 ne sont pas saturées , ce qui implique que les variables duales associées u3 et u4 sont nulles.
u3=0, u4=0

2 - Utilisation du **Corollaire du Théorème 2**

Si la valeur optimale d'une variable n'est pas nulle, alors la contrainte duale correspondante est saturée pour la solution optimale.
X1 et X2 sont non nuls alors les inéquations 1 et 2 du dual deviennent des équations
4u1 + 2 u2 = 4500
3u1 + u2 = 3000

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4*1 - 3*2 = 4-6 = -2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4500 & 2 \\ 3000 & 1 \end{vmatrix} = 4500*1-3000*2 = 4.500-6.000 = - 1.500$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4500 \\ 3 & 3000 \end{vmatrix} = 4*300-3*4500 = 12.000-13.500 = -1.500$$

$u_1 = \Delta_1/\Delta = -1500/-2 = + 750$ $u_2 = \Delta_2/\Delta = -1500/-2 = + 750$

Vérification du Théorème 1 : Deux problèmes duaux ont la même valeur optimale de la fonction économique lorsque l'optimum existe.

[2] Rappel de microéconomie : A l'équilibre, le prix est égal au coût marginal.

Min 3600u1 + 1400u2 + 500u3 + 1000u4 = 3.600*750 + 1400*750 = 3.750.000 qui est la valeur optimale du primal.

Récapitulation des résultats du dual

u1 = 750	u2=750	u3 = 0	u4 = 0	Z' = 3.750.000

Corrigé de 4.1.3 - Application, Utilité et Interprétation économique

1- Ecrire le programme optimal de l'industriel, puis son dual.
L'objectif de l'industriel est de Maximiser son chiffre d'affaires sous l'ensemble de contraintes.

Max z = 5x1 + 3x2 sous le système de contraintes :
x1 ≥ 0, x2 ≥ 0
3 x1 + 5 x2 ≤ 15
5 x1 + 2 x2 ≤ 10

2 - Rédiger <u>un</u> énoncé motivé pour le dual.

Un autre industriel désire acheter les heures des machines M1 et M2 et pour cela les deux industriels recherchent une estimation d'un prix horaire u1 pour la machine M1 et d'un prix horaire u2 pour la machine M2. Pouvant disposer de 15 heures de machine M1 et 10 heures de machine M2, l'acheteur cherche donc à déterminer u1 et u2 tels que l'expression du coût z'=15u1 + 10 u2 soit ***minimum***.

Le vendeur lui cherche des prix u1 et u2 pour lesquels le gain soit au moins le même que lorsqu'il produisait les biens A et B ; u1 et u2 devront alors vérifier les inéquations
3 u1 + 5u2 ≥ 5
5u1 + 2 u2 ≥ 3

En effet, A est vendu 5 F et pour produire A il fallait 3 heures de M1 et 5 heures de M2. De même B est vendu 3 F et pour produire B il fallait 5 heures de M1 et 2 heures de M2.
De plus u1 et u2 sont non négatifs : u1 ≥ 0, u2 ≥ 0

 © 1996 - Magloire LANHA

Le programme dual est :

Min z'=15u1 + 10 u2 sous le système de contraintes :
$u1 \geq 0$, $u2 \geq 0$
$3\,u1 + 5u2 \geq 5$
$5u1 + 2\,u2 \geq 3$

3 - Résoudre le primal.
Il n'y a que deux variables, le problème peut être résolu graphiquement.

La solution est :	x1 = 20/19	x2 = 45/19	z=235/19 F

4 - En déduire la solution du dual.

1 - Utilisation du **Théorème 2**

Si pour une solution optimale d'un programme linéaire une contrainte n'est pas saturée, alors la valeur optimale (duale) correspondante est nulle. Interprétation dans le cas d'espèce : Si une machine n'est pas utilisée à sa pleine capacité, alors son coût marginal pour une heure supplémentaire de location (=prix) est nul

Saturation des contraintes du primal
3*20/19 + 5 *45/19 = 15 => Contrainte (1) saturée
5* 20/19 + 2*45/19 = 10 => Contrainte (2) saturée

Attention : **La réciproque du théorème 1 n'étant pas vraie, nous ne pouvons trouver d'implication lorsque les contraintes sont saturées !**

2 - Utilisation du **Corollaire du Théorème 2**

Si la valeur optimale d'une variable n'est pas nulle, alors la contrainte duale correspondante est saturée pour la solution optimale.
X1 et X2 sont non nuls alors les inéquations 1 et 2 du dual deviennent des équations
3u1 + 5 u2 = 5
5u1 + 2u2 = 3

La résolution de système de deux équations à deux inconnues donne la solution

u1 = 5/19 u2 = 16/19

Vérification du Théorème 1 : Deux problèmes duaux ont la même valeur optimale de la fonction économique lorsque l'optimum existe.

Min 15u1 + 10u2 = 15*5/19 + 10*16/19 = 235/19 qui est la valeur optimale du primal.

Récapitulation des résultats du dual

u1 = 5/19	u2=16/19	Z' = 235/19

4.2 Compléments

Les problèmes étudiés dans les chapitres précédents sont dit à variables continues. Cette approche est justifiée quand la variable de choix est une quantité infiniment divisible comme le temps machine. Certains problèmes de programmation linéaire sont à variables discrètes : nombre d'avions à produire par exemple. Le passage du résultat **réel** vers le résultat **entier** est délicat comme indiqué dans l'introduction générale de ce cours de TQAG. Aucune technique n'est vraiment satisfaisante, il faut étudier au cas par cas. Deux méthodes **heuristiques** sont souvent utilisées :

- les méthodes de SEP (**séparation et évolution progressive**).

- la **méthode de troncatures** qui consiste à **réduire (**tronquer**) l'ensemble des solutions admissibles** en introduisant des **contraintes linéaires arbitraires** jusqu'à obtenir une solution à valeurs entières. **Dantzig** et **Gomery** ont chacun proposé une méthode qui tout étant heuristique, tentent de réduire l'arbitraire dans le choix des contraintes linéaires./.

© 1996 - Magloire LANHA

5 - Exercices d'entraînement

EXERCICE N° 1

A la suite d'un appel d'offre lancé par le Ministère des Armées, la société SOCRATE a obtenu une commande de l'armée de terre de dix millions de bidons par an pendant trois ans.

Ces bidons, d'une contenance de dix litres, ont une forme particulière. La société SOCRATE doit en conséquence acquérir les moules à cette fabrication. Trois types de moules sont susceptibles de fabriquer ces bidons spéciaux : les moules A, B et C.

Une étude prospective effectuée par le chef comptable en collaboration avec vous a montré que ces moules avaient des caractéristiques particulières.

Les moules A, B, et C seront installés dans un atelier dénommé « atelier spécial ». Cet atelier effectuera 1700 heures de travail par an. Afin de mieux appréhender le modèle prévisionnel vous avez envisagé trois hypothèses (annexes I, II, et III).

QUESTIONS :

1° Vous déterminerez successivement, à partir des hypothèses 1, 2 et 3, le nombre de module A, B et C qu'il convient d 'acheter pour maximiser la marge bénéficiaire horaire de l'atelier spécial.

2° Vous calculerez cette marge.

3° Vous commenterez, dans une courte note (quinze lignes maximum), les résultats trouvés.

Annexe I

PREMIERE HYPOTHESE

a) Budget de l'atelier spécial : (en francs)

Année 1 : 61 200
Année 2 : 40 800
Année 3 : 34 000

b) Coût horaire d'utilisation des moules : (en francs)

	Moule A	Moule B	Moule C
Année 1	1,20	1,00	0,80
Année 2	1,30	1,00	1,00
Année 3	1,60	1,60	0,80

c) Marge bénéficiaire horaire : (en francs)

Moule A : 4,00
Moule B : 4,50
Moule C : 5,00

Annexe II

DEUXIEME HYPOTHESE

a) Contraintes budgétaires de l'atelier spécial : (en francs)

Année 1 : 61 200
Année 2 : 61 200
Année 3 : 61 200

b) Coût horaire d'utilisation des moules : (en francs)

	Moule A	Moule B	Moule C
Année 1	1,20	1,00	2,00
Année 2	1,30	1,00	1,00
Année 3	1,60	1,60	0,80

c) Marge bénéficiaire horaire : (en francs)

Moule A : 4,00
Moule B : 4,50
Moule C : 5,00

Annexe III

TROISIEME HYPOTHESE

a) Contraintes budgétaires de l'atelier spécial : (en francs)

Année 1 : 68 000
Année 2 : 68 000
Année 3 : 68 000

b) Coût horaire d'utilisation des moules : (en francs)

	Moule A	Moule B	Moule C
Année 1	1,20	1,00	2,00
Année 2	1,30	1,00	1,00
Année 3	1,60	1,60	0,80

c) Marge bénéficiaire horaire : (en francs)

Moule A : 5,00
Moule B : 5,00

© 1996 - Magloire LANHA

Moule C : 5,00

EXERCICE N° 2

Résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

$$\text{MIN } Z(X) = 2X_1 + 3X_2 + X_3$$

$$\begin{array}{lllll} X_1 & + X_2 & - X_3 & \geq & ½ \\ & X_2 & + X_3 & \geq & 1 \end{array}$$

$X_1 \geq 0$ $X_2 \geq 0$ $X3 \geq 0$

EXERCICE N° 3

Une entreprise d'appareillages électriques, la société anonyme ÉLECTRO, au capital de 40 millions de F, fabrique trois types de radiateurs X, Y et Z dans ses usines.

Celles-ci se composent d'un premier atelier **Presse** où une machine découpe le bâti. Les produits passent ensuite dans un deuxième atelier **Soudage** où, grâce à huit appareils similaires utilisés chacun par un ouvrier, on effectue un certain nombre d'opérations.

Enfin dans un atelier **Assemblage**, une cinquantaine d'ouvriers réalisent manuellement le finissage des radiateurs.

Cette entreprise ne peut, pour une période mensuelle, vendre au maximum que :
- 3 000 radiateurs X au prix de 260 F hors taxes ;
- 5 000 radiateurs Y au prix de 350 F hors taxes ;
- 4 000 radiateurs Z au prix de 420 F hors taxes.

Mais pour des raisons commerciales, elle doit cependant livrer au minimum :
- 1 000 radiateurs X ;
- 1 000 radiateurs Y ;
- 1 000 radiateurs Z.

La machine de l'atelier **Presse** peut réaliser les productions suivantes par heure, tout au long de l'année :
- 75 radiateurs X ;
- *ou* 50 radiateurs Y ;
- *ou* 30 radiateurs Z.

Les appareils de l'atelier Soudage peuvent réaliser les productions suivantes par heure et par machine :
- 8 radiateurs X ;
- *ou* 5 radiateurs Y ;
- *ou* 4 radiateurs Z.

Enfin, les ouvriers de l'atelier Assemblage mettent une heure pour terminer un radiateur, quel qu'en soit le type.

Dans la société ÉLECTRO, chaque ouvrier peut travailler au maximum 200 heures par mois. Cela correspond à la capacité de l'atelier Presse. Il y a 48 ouvriers présents habituellement à l'atelier **Assemblage**. On concevra que les congés (4 semaines par an) sont étalés régulièrement durant toute l'année, l'effectif de cet atelier étant de 52 personnes. Les éléments de coûts sont les suivants (pour un mois) :

Eléments de coûts	**Francs**
- matière utile pour la fabrication d'un radiateur X	70
- matière utile pour la fabrication d'un radiateur Y	96
- matière utile pour la fabrication d'un radiateur Z	100
- coût horaire de la main-d'oeuvre directe d'Assemblage	30
- coût horaire de fonctionnement de la section Presse	1 500
- coût horaire de fonctionnement d'un appareil de la section Soudage	320
coût horaire par ouvrier de fonctionnement de la section Assemblage	20
- coût de structure de la section Presse	200 000
- coût de structure de la section Soudage	200 000
- coût de structure de la section Assemblage	20 000
- frais généraux communs	280 000

Notes :

- La marge sur coût variable unitaire est égale au prix de vente minoré du coût variable unitaire.
- Les coûts de structure sont les coûts fixes. Ils ne sont pas affectés aux produits mais déduits globalement de la marge sur coût variable totale de tous les produits.

 © 1996 - Magloire LANHA

Question 1 . Formaliser le programme de fabrication permettant de maximiser le résultat en procédant par étapes :
1a - Calculer par produit dans un tableau :
* le **coût variable** : coût des matières, de la main d'oeuvre directe et de fonctionnement des sections
* et la **marge sur coût variable**.

1b - Pour chaque atelier, dégager le temps nécessaire pour fabriquer **la production minimale** de chaque type de radiateur. En déduire le temps disponible pouvant être affecté indifféremment aux types de radiateurs.

1c - Les productions minimales étant donc satisfaites, écrire le système de contraintes et l'objectif en fonction des **productions complémentaires** pour chaque type de radiateur.

Question 2 . On considère que le programme ci-après est <u>**équivalent**</u> au programme de la question précédente. Les quantités x1, x2 et x3 sont les « **productions complémentaires** » respectives des type de radiateur Y, Y, Z et ne contiennent donc pas les **productions minimales**.

MAX MSCV = $80x_1 + 110x_2 + 140x_3$
Sous les contraintes :

$$0 \le x_1 \le 2\,000,\quad 0 \le x_2 \le 4\,000,\quad 0 \le x_3 \le 3\,000$$
$$\begin{array}{lllllll} 2x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & \le & 20\,000 \\ 5x_1 & + & 8x_2 & + & 10x_3 & \le & 41\,000 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \le & 6\,600 \end{array}$$

2.a - Résoudre ce programme linéaire
2.b - Calculer le résultat optimal mensuel.

<u>Exercice 4</u>

Une entreprise emploie de la main ouvrière et utilise une matière première et deux types d'équipements, pour produire un bien d'un certain type. Elle dispose de cinq techniques de production, fonctionnant à rendements constants et caractérisées par la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 12 & 15 & 14 & 6 & 8 \\ 9 & 12 & 12 & 9 & 12 \\ 4 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Chaque colonne de cette matrice correspond à une technique de production. Les quatre lignes définissent respectivement : le nombre d'heures de travail, la quantité de matière première et la durée d'utilisation des deux types d'équipement (en heures-machines) pour produire une unité de bien avec les différentes techniques. Ainsi, produire une unité de bien avec la première technique (colonne 1) nécessite 12 heures de travail, 9 unités de matières premières, 4 Heures d'utilisation d'une machine de type 1 et 1 heure d'utilisation d'une machine de type 2. On peut interpréter ces données en supposant, par exemple, que pour la première technique fonctionnant à intensité unité, une machine de type 1 est utilisée par trois ouvriers pendant une heure, l'heure restante correspondant à des tâches de manutention et contrôle ne nécessitant pas d'équipement particulier (les 12 heures se décomposent alors en 2 x 4 + 3 x 1 + 1, mais d'autres combinaisons correspondant aux données de la matrice sont disponibles).

L'entreprise dispose de 10 machines de type 1 et de 8 machines de type 2. Chaque machine peut fonctionner 10 heures par jour. Les équipements du premier type peuvent donc être utilisées quotidiennement pendant une durée de 100 heures-machines et les équipements du deuxième type pendant 80 heures-machines.

Le salaire horaire ouvrier et le prix unitaire de la matière première sont égaux à l'unité. Le bien produit est vendu sur un marché de concurrence parfaite à un prix unitaire égal à 30. L'entreprise vise à maximiser son profit.

On note x_1, x_2, ..., x_5 les productions quotidiennes réalisées respectivement avec les techniques 1, 2, ..., 5. La marge quotidienne sur coût variable correspondant à la technique 1 est égale à la différence entre le chiffre d'affaires $30x_1$ et les coûts variables $21x_1$ (dont $12x_1$ de coût salarial et $9x_1$ de coût de matière première). De même pour les autres techniques.

On note respectivement p_1 et p_2 le prix d'une machine de type 1 et 2. On estime que chaque type d'équipement perd 10% de sa valeur chaque année pour des raisons d'usure. Par ailleurs, les actionnaires de l'entreprise peuvent réaliser des placements alternatifs procurant un rendement annuel de 12 %. Les coûts fixes annuels CF sont évalués comme la somme de l'amortissement des équipements, c'est-à-dire $0{,}10(10p_1 + 8p_2)$ et du coût d'opportunité supporté par les actionnaires, c'est-à-dire $0{,}12(10p_1 + 8p_2)$. On a donc :

$$CF = 0{,}22(10\,p_1 + 8\,p_2) = 2{,}20p_1 + 1{,}76p_2$$

 © 1996 - Magloire LANHA

L'entreprise fonctionne 250 jours par an. Le profit total Π s'obtient par différence entre les marges obtenues sur l'ensemble des techniques et des coûts fixes supportés, c'est-à-dire :

$$\Pi = 250(9x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 15\, x_4 + 10\, x_5) - CF$$

Questions

1 - Ecrivez le programme linéaire définissant les intensités d'utilisation optimales des différentes techniques.

2 - Définissez le programme dual et résolvez le par un raisonnement graphique.

3 - Quelles sont les intensités d'utilisation optimales des techniques.

4 - Pour quelle valeur de $p_1 + p_2$, l'entreprise a-t-elle intérêt à acquérir une machine supplémentaire de type 1 ou de type 2.

5 - Pour des raisons techniques liées à l'exiguïté des ateliers, l'entreprise ne peut envisager que l'achat d'une seule machine (soit de type 1, soit de type 2). Quel choix doit-elle faire si $p_1 = 20\,000$ et $p_2 = 45\,000$?

Exercice 5

Une usine spécialisée dans la production de « froid » fabrique deux types de produits : des réfrigérateurs et des congélateurs. La fabrication passe par quatre ateliers : moteurs, armoires, montage des réfrigérateurs, montage des congélateurs.

L'atelier fabrication des moteurs peut produire 10.000 moteurs de réfrigérateurs ou 5.000 moteurs de congélateurs ou une combinaison des deux : un moteur de congélateur étant équivalent à deux moteurs de réfrigérateurs.

L'atelier d'habillage des appareils peut fabriquer 10.000 armoires de réfrigérateurs ou 12.500 armoires de congélateurs ou une combinaison des deux : une armoire de congélateur étant équivalente à 10/12,5 armoire de réfrigérateurs.

Les ateliers de montage ont une capacité mensuelle respectives de 4.200 pour les réfrigérateurs et de 3.500 pour les congélateurs.

TRAVAIL A FAIRE

1 - Sachant que la marge sur coût variable est de 600 F pour un réfrigérateur et de 850 F pour un congélateur, déterminer le programme optimal de production et le résoudre graphiquement.

2 - Résoudre le programme dual correspondant et l'interpréter.

EXERCICE N° 6

La ferme avicole "CalAvi" situé à une lieue du campus universitaire élève des poulets, des pintades et des dindons. Au stade actuel de son développement elle ne peut loger au maximum que 1.000 volailles tous genres confondus. L'étude de marché a montré que l'exploitant de CalAvi ne peut vendre plus de 300 pintades par mois. Des études statistiques ont montré qu'une pintade consomme 2 fois plus de grains qu'un poulet ; un poulet consomme 4 fois moins qu'un dindon. L'approvisionnement mensuel en grain permettrait au maximum d'élever 1600 poulets.

L'élevage d'un poulet coûte 1.000 F, celui d'une pintade 1.300 F et celui d'un dindon 3.000 F. L'exploitant éleveur peut vendre le poulet 1.500 F, la pintade 2.400 F et le dindon 4.800 F. **Quelles volailles doit-il élever mensuellement pour avoir un maximum de profit ?**

EXERCICE N° 7

Deux pays P et Q produisent de l'alimentation et des vêtements. Les travailleurs du pays P peuvent produire 1 unité d'aliments et 3 unités de vêtements en 1 heure. Ceux du pays Q produisent 2 unités d'aliments et ½ unité de vêtements en 1 heure. Ces pays mettent en commun leur production. Les contraintes en matières premières impliquent que l'on ne peut produire plus de 20 000 unités d'aliments et 30 000 unités de vêtements. Comment les travailleurs (ou plutôt les heures de travail) doivent-il se répartir entre les deux pays pour que la production soit la plus grande possible (on considère qu'une unité d'aliments vaut une unité de vêtements) ? *(C.N.A.M. Paris).*

EXERCICE N° 8

L'entreprise *Marcell®* *S.A.* fabrique des téléphones cellulaires de deux types *Procell*™ ("pour les professionnels") et *Allcell*™ ("pour tout le monde"). *Marcell® S.A*. définit son programme d'activité mensuellement à partir des données suivantes.

Le cellulaire *Procell*™ est vendu à 138 000 F tandis que le cellulaire *Allcell*™ est vendu à 136 000 F. Les cellulaires sont fabriqués grâce à 3 sections homogènes (SH1, SH2, SH3) aux capacités limitées mensuellement comme suit : SH1 : 200 ; SH2 : 540 ; SH3 : 480. A ces sections homogènes de fabrication sont associées des unités d'œuvre dont les coûts variables sont respectivement 10 000 F, 12 000 F et 14 000F. Un *Procell*™ nécessite 2 unités d'œuvre dans SH1, 1 unité d'œuvre dans SH2, 4 unités d'œuvre dans SH3. Un *Allcell*™ nécessite 1 unité d'œuvre dans SH1, 4½ unités d'œuvre dans SH2, 3 unités d'œuvre dans SH3.

1 - Déterminer la marge sur coût variable d'unités d'œuvre de chaque produit.

2 - Quelle quantité de chaque produit doit fabriquer l'entreprise pour maximiser sa marge mensuelle globale ?

3 - Préciser la valeur de cette marge mensuelle par produit et la marge globale.

Titre 2 : Théorie des Graphes (Théorie des Réseaux)

Chapitre 1 : Eléments fondamentaux de la théorie des graphes

1 - Graphes et matrices associées

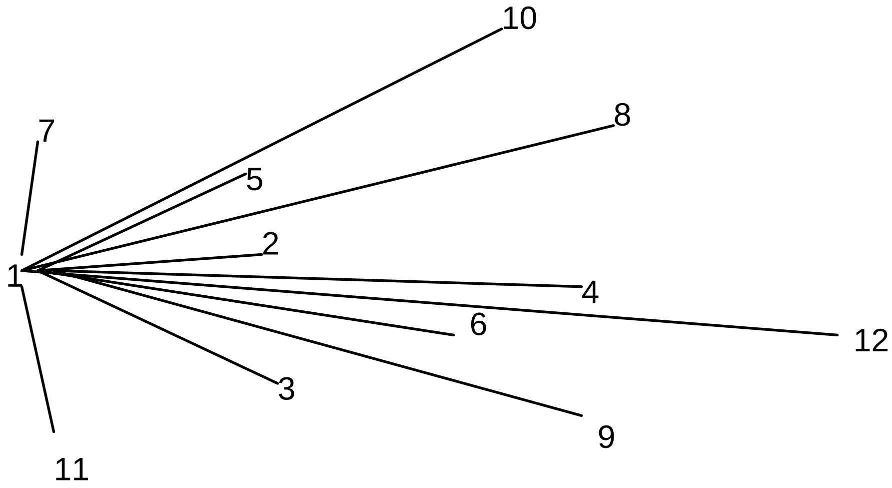
1.1 - Définitions de base

Soit X un ensemble non vide et U un sous-ensemble du produit cartésien XxX. On note G={X,U} le graphe dont les éléments de X sont les **sommets** et les éléments de U sont les **arcs**. On note Γ la **relation binaire** qui **relie ou non** (**matrice booléenne**) deux éléments quelconques de X.
Remarque : $x\Gamma y \iff y\,\Gamma^{-1}x$
x est dit **prédécesseur** ou **précedent** de y
et y est **successeur** ou **suivant** de x

1.2 - Illustrations
Exemple
X étant l'ensemble des 12 premiers nombres entiers naturels strictement positifs, on considère la relation binaire sur X :
$x\,\Gamma\,y \iff$ x divise y. Représenter cette relation
a) par son graphe
b) par sa matrice booléenne,
c) par son dictionnaire des prédécesseurs
d) par son dictionnaire des successeurs

Corrigé

a) Graphe (Représentation sagittale)



(A compléter en amphi à titre d'exercice)

b) par sa matrice booléenne

Γ c	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Convention utilisée : La cellule à l'intersection de la ligne x et de la colonne y prend la valeur 1 si xΓy et 0 sinon. La matrice booléenne est une matrice triangulaire (supérieure).
NOTE : On peut ne pas mettre les zéros pour une meilleure lisibilité du tableau.

© 1996 - Magloire LANHA

c) Dictionnaire des prédécesseurs (ici Les diviseurs de X)

X	1	2	3	4	5	6	7
Γ^{-1}(X)	1	1,2	1,3	1,2,4	1,5	1,2,3,6	1,7

X	8	9	10	11	12
Γ^{-1}(X)	1,2,4,8	1,3,9	1,2,5,10	1,11	1,2,3,4,6,12

d) Dictionnaire des successeurs (ici Les multiples de X)

X	1	2	3	4
Γ(X)	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,1,12	2,4,6,8,10,12	3,6,9,12	4,8,12

X	5	6	7	8	9	10	11	12
Γ(X)	5,10	6,12	7	8	9	10	11	12

2 - Définitions de base

2.1 - Concepts orientés (qui font intervenir le sens des arcs)

2.1.1. **Un Chemin** est une succession d'arcs adjacents permettant de passer d'une manière continue d'un sommet à un autre. (Voir **Chaîne**)

2.1.2. **Un Circuit** est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues (Voir **Cycle**)

2.1.3. **Une Boucle** est un arc dont l'origine et l'extrémité sont confondues (Rélexivité).

2.1.4. **La Longueur d'un chemin ou d'un circuit** est le nombre d'arcs que comprend ce chemin ou circuit.

N.B. Cette définition sera améliorée après l'introduction des graphes *évalués*.

Exercice : Mettre un mot ou plusieurs mots dans la liste définie ci-avant sous chacun des dessins ci-après

Fig 1.a	Fig 1.b ....
Fig 1.C	Fig 1.d ....

2.2 - Concepts non orientés (qui ne font pas intervenir le sens des arcs)

2.2.1. Une **Chaîne** est une séquence d'arcs adjacents. Contrairement au cas d'un chemin, le sommet origine d'un arc ne coïncide pas nécessairement avec l'extrémité de l'arc qui le précède

2.2.2. Un **Cycle** est une chaîne fermée

2.2.3. Un **Graphe** est **évalué** (ou ***valorisé***) si à tout arc qui constitue le graphe, il correspond une valeur numérique. La signification de cette valeur dépend du problème modélisé : distance entre deux points, durée d'une opération, débit circulant entre les deux points, le coût d'une opération, etc.

2.2.4 - **Arborescence**
Tel un arbre, c'est un graphe composé d'un sommet S n'ayant aucun sommet antécédent, et d'où partent un ou plusieurs arcs qui possèdent les propriétés suivantes
- à tout sommet Xi du graphe autre que S aboutit un arc et un seul
- le graphe est sans circuit.

 © 1996 - Magloire LANHA

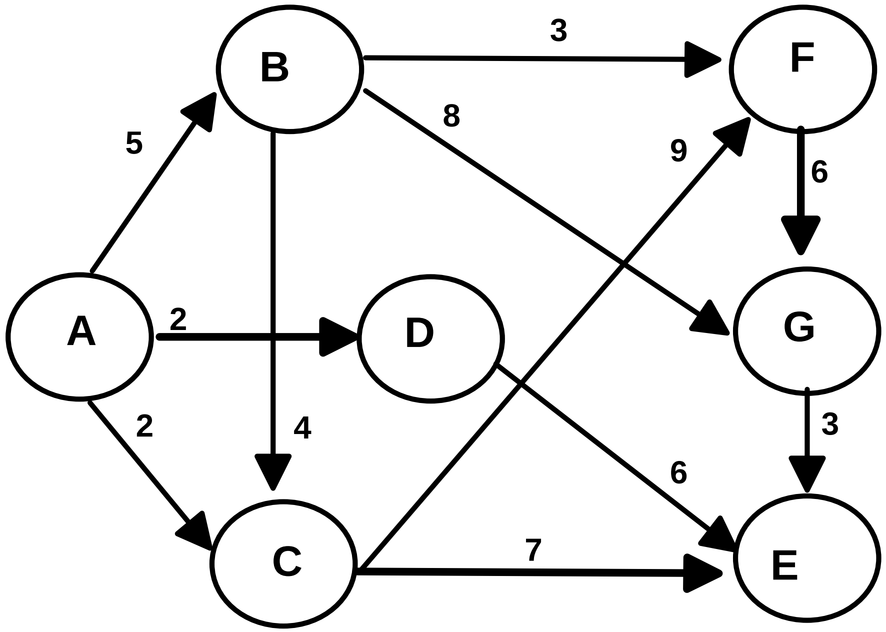
Exercice : Mettre un mot ou plusieurs mots dans la liste définie ci-avant sous chacun des dessins ci-après.

Fig 2.a	Fig 2.b ....
Fig 2.C	Fig 2.d ....

3 - Recherche d'un chemin de valeur optimale dans un graphe : algorithme de Ford

3.1 - Un Enoncé

Soit le graphe sans circuit évalué suivant



- Construire le dictionnaire des précédents
- Déterminer les niveaux des sommets du graphe
- Re-dessiner le graphe ordonné par niveau
- En déduire le chemin le plus long passant de la racine au sommet de niveau le plus élevé.
- Redessiner le graphe ordonné par niveau en y faisant figurer les dates au plus tôt et au plus tard et le chemin critique.
- Calculer les marges totales et marges libres des tâches.

3.2 Principes de résolution

- Construire le dictionnaire des précédents

Niveau 0

X	A	B	C	D	E	F	G
Γ^{-1}(X)	-	A	A,B	A	C,D	B,C	B,E,F

- Déterminer les niveaux des sommets du graphe

A n'a **pas** de précédent. Le sommet de niveaux 0 est {A}. C'est la racine de l'arborescence. On élimine A du dictionnaire des précédents.

Niveau 1

X	-	B	C	D	E	F	G
Γ^{-1}(X)	-	-	B	-	C,D	B,C	B,E,F

B et D n'ont **plus** de précédent. Les sommets de niveaux 1 sont {B,D}. On élimine B et D du dictionnaire de précédents.

Niveau 2

X	-	-	C	-	E	F	G
Γ^{-1}(X)	-	-	-	-	C	C	E,F

C n'a **plus** de précédent. Le sommet de niveaux 2 est {C}. On élimine C du dictionnaire des précédents.

Niveau 3

X	-	-	-	-	E	F	G
Γ^{-1}(X)	-	-	-	-	-	-	E,F

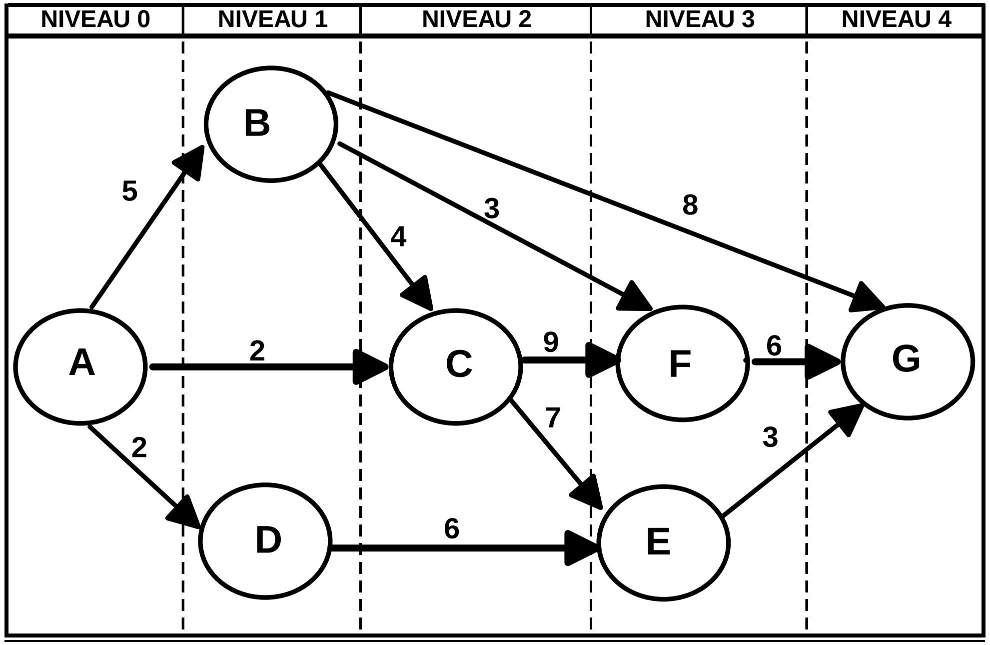
E et F n'ont **plus** de précédent. Les sommets de niveaux 3 sont {E,F}. On élimine E et F du dictionnaire des précédents.

Niveau 4

X	-	-	-	-	-	-	G
Γ^{-1}(X)	-	-	-	-	-	-	-

G n'a **plus** de précédent. Le sommet de niveaux 4 est {G}. G n'a pas de suivant. Il n'y a donc plus de niveau supérieur, le processus est terminé.

- Redessiner le graphe ordonné par niveau



- En déduire le chemin le plus long passant de la racine au sommet de niveau le plus élevé.

Application au graphe précédent

Principe : On **marque** le sommet y selon la formule **m(y) = Max[m(x)+L(x,y)] pour x appartenant à l'ensemble des précédents de y, avec m(Racine)=0.**

L(x,y) est la longueur de l'arc d'origine x et d'extrémité y.

Niveau 0
m(A)=0, car pas de précédent, donc pas d'*arc aboutissant* à A.

Niveau 1
Dans cet exemple, les sommets de niveau 1 n'ont qu'un seul arc aboutissant.

m(B) = m(A) + L(A,B) = 0 + 5 = 5 (En provenance de A)
m(D) = m(A) + L(A,D) = 0 + 2 = 2 (En provenance de A)

<u>Niveau 2</u>
On aboutit à C en provenance de A ou de B. La marque est Max [m(x)+ L(x,y)] pour x appartenant à l'ensemble des précédents de y.
m(A)+L(A,C)= 0 + 2 = 2
m(B)+L(B,C)= 5 + 4 = 9
d'où m(C)=Max[m(A)+L(A,C),m(B)+L(B,C)] = 9 (En provenance de B)

<u>Niveau 3</u>
On aboutit à E en provenance de C ou de D.
m(C)+L(C,E) = 9 + 7 = 16
m(D)+L(D,E) = 2 + 6 = 8
d'où m(E)=Max[m(C)+L(C,E),m(D)+L(D,E)] = 16 (En provenance de C)

On aboutit à F en provenance de C ou de B.
m(B)+L(B,F) = 5+ 3 = 8
m(C)+L(C,F) = 9 + 9 = 18
d'où m(F)=Max[m(B)+L(B,F),m(C)+L(C,F)] = 18 (En provenance de C)

<u>Niveau 4</u>
On arrive à G en provenance de B,E ou F.
m(B)+L(B,G) = 5 + 8 = 13
m(E)+L(E,G) = 16 + 3 = 19
m(F)+L(F,G) = 18 + 6 = 24
d'où m(G)=Max[m(B)+L(B,G),m(E)+L(E,G),m(F)+L(F,G)] = 24
(En provenance de F)
Le chemin est retrouvé à partir de la fin G <-F<- C <-B <-A, soit le chemin ABCFG.

Note : Pourquoi rechercher le chemin le plus long ?

Les valeurs du graphe précédent peuvent dans un **problème d'ordonnancement** être les délais minima nécessaires entre deux tâches. La tâche B ne peut démarrer que 5 jours après le démarrage de la tâche A par exemple. Il s'agit de contraintes d'antériorité évaluées.

3.3 - Cas du chemin le plus court.

La formulation de certains problèmes peut être telle que l'objectif est de retrouver le chemin le plus court. L'algorithme est le même que dans le cas du chemin le plus long sauf qu'il faut remplacer la formule **m(y) = Max[m(x) + L(x,y)]** par :
m(y) = Min[m(x) + L(x,y)].

3.4 - Calendrier du projet

Notations

Soient :
- x, une tâche.
- T_x : date de début au plus tôt de la tâche x
- T_x^* : date de début au plus tard de la tâche x

Ces informations sont reportées sur le grape dans un rectangle ou un cercle.

X	
Tx	Tx*

3.4.1 - Date de début au plus tôt d'une tâche

T_x : date de début au plus tôt de la tâche x

T_x est la longueur du chemin le plus long aboutissant à x :
La date au plus tôt d'une tâche est sa marque.

$$\mathbf{T_x = m(x)}$$

La formule de calcul de la marque est donnée plus haut.

Application : Cf. calculs ci-dessus reportés dans le graphique ci-après.

3.4.2 - Date de début au plus tard d'une tâche

T_x^* : date de début au plus tard de la tâche x

On pose pour la tâche finale z, $T_z^* = T_z$
Soit un sommet dont tous les sommets suivants sont marqués (on a déjà déterminé les dates au plus tard de tous ses suivants). On a alors :

$\mathbf{T_x^* = Min\ [Ty^* - L(x,y)]}$ (y décrit est l'ensemble des suivants de x).

© 1996 - Magloire LANHA

Remarque : Sur le chemin critique, les dates au plus tôt sont égales aux dates au plus tard.

Application

Sur le chemin critique : $\mathbf{T_x^* = m(x)}$
En conséquence :

$T_G^* = 24$
$T_F^* = 18$
$T_C^* = 09$
$T_B^* = 05$
$T_A^* = 00$

Pour les autres points :

$\mathbf{T_x^* = Min\ [Ty^* - L(x,y)]}$ (y décrit est l'ensemble des suivants de x).

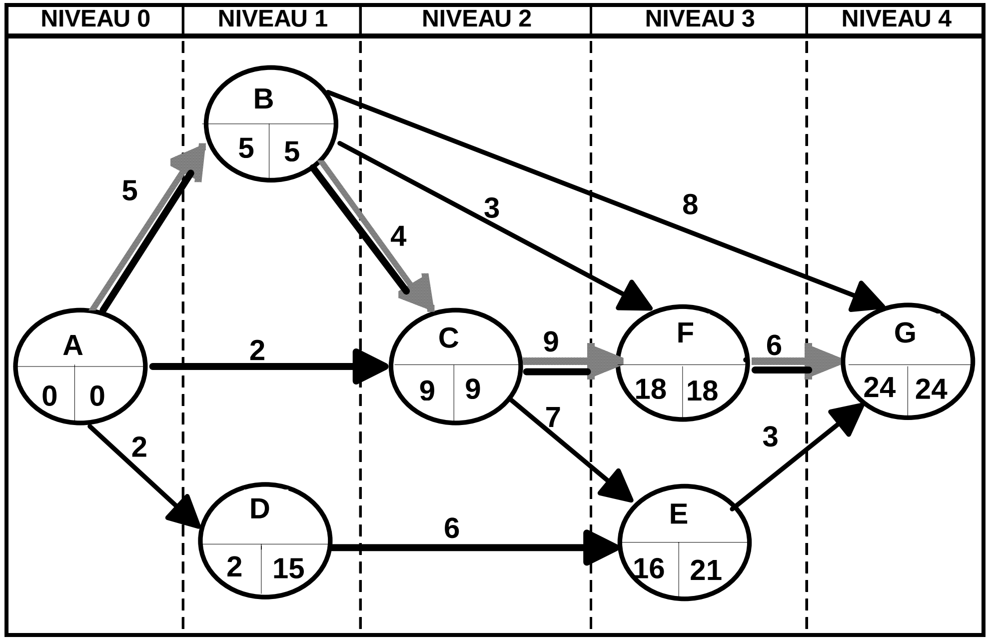
Niveau 3
E n'a qu'un seul suivant G
$T_E = T_G^* - L(E,G) = 24-3 = 21$

Niveau 2
C a deux suivants : E et F
$T_C = MIN\ [T_E^* - L(C,E),\ T_F^* - L(C,F),= Min(\ 21-7,18-9) = Min(14,9) = 9$

Remarque : C étant sur le chemin critique, on retrouve la réponse déjà connue. Ce calcul est effectué à des fins d'illustration du cas de Min sur 2 valeurs). On peut s'amuser aussi à calculer pour B Qui a 3 suivants.

Niveau 1
D n'a qu'un seul suivant E
$T_D = T_E^* - L(D,E) = 21-6 = 15$

Schéma récapitulatif



3.5 - Définition et calcul des marges

3.5.1 - Marge totale

C'est le retard total que l'on peut prendre dans la mise en route d'une tâche, <u>sans remettre en cause les dates au plus tard</u> des tâches suivantes, donc sans retarder les travaux.
Pour une tâche x, la marge totale est donc **:** $\mathbf{Mt_x = T_x^* - T_x}$

Remarque : Sur le chemin critique, les dates au plus tôt sont égales aux dates au plus tard. En conséquence, les **marges totales** y sont nulles.

3.5.2 - Marge libre

C'est le retard maximum que l'on peut apporter à la mise ne route d'une tâche, sans remettre en cause <u>la date au plus tôt</u> d'aucune autre tâche.

Pour une tâche x, la marge libre est donc **:** $\mathbf{Ml_x = Min[T_y - T_x - L(X,Y)]}$ (pour y décrivant l'ensemble des suivants de x).

© 1996 - Magloire LANHA

Pour la tâche finale : Ml_z=0 par définition.

Remarque : La marge totale d'une tâche est toujours inférieure ou égale à sa marge libre. $\mathbf{Mt_x \geq Ml_x}$.

Remarque : Sur le chemin critique, les **marges libres** sont nulles.

3.4.3 - Application

Marge totale

Tâche x	T_x^*	T_x	$Mt_x = T_x^* - T_x$
A	0	0	0
B	5	5	0
C	9	9	0
D	15	2	13
E	21	16	5
F	18	18	0
G	24	24	0

Marge libre

Tâche x	Calculs	Marge libre
A	$[T_B - T_A - L(A,B)] = 05 - 00 - 05 = 00$ $[T_C - T_A - L(A,C)] = 09 - 00 - 02 = 07$ $[T_D - T_A - L(A,D)] = 02 - 00 - 02 = 00$	Ml = 0
B	$[T_C - T_B - L(B,C)] = 09 - 05 - 04 = 00$ $[T_F - T_B - L(B,F)] = 18 - 05 - 03 = 10$ $[T_G - T_B - L(B,G)] = 24 - 05 - 08 = 11$	Ml = 00
C	$[T_E - T_C - L(C,E)] = 16 - 09 - 07 = 00$ $[T_F - T_C - L(C,F)] = 18 - 09 - 09 = 00$	Ml = 00
D	$[T_E - T_D - L(D,E)] = 16 - 02 - 06 = 08$	Ml = 08
E	$[T_G - T_E - L(E,G)] = 24 - 16 - 03 = 05$	Ml = 05
F	$[T_G - T_F - L(F,G)] = 24 - 18 - 06 = 00$	Ml = 00
G		Ml = 00

 © 1996 - Magloire LANHA

Exercices d'entraînement

EXERCICE N° 1

L'entreprise Bontemps décide de lancer un produit nouveau sur le marché. Les services commerciaux ont déterminé l'ensemble des tâches nécessaires à cette action : a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k.
Les conditions d'antériorité liant ces tâches et les durées en jour de celle-ci sont rassemblées dans le tableau ci-dessous :

Tâches	Tâches antérieures	Durée
a	e	4
b	j, e	6
c	-	12
d	-	14
e	-	8
f	d	2
g	f, d	10
h	a, c, d	6
i	h, a, c, e, k, d, f	8
j	e	12
k	f, d	2

a) Déterminer les tâches immédiatement antérieures à chaque tâche.
b) Tracer le graphe du projet par la méthode des potentiels et déterminer le ou les chemins critiques en indiquant sur le graphe les dates au plus tôt et les dates au plus tard.
En quel temps minimum le lancement pourra-t-il être réalisé ?
c) Dresser un tableau des marges de flottement (marges totales) et des marges libres.

EXERCICE N° 2 : Théorie des Graphes (6 points/20)

Une agence cherche à établir le planning d'une campagne publicitaire pour lancer un nouveau produit. Elle envisage d'utiliser les **affiches**, la **télévision** et des annonces dans la **presse**. Une conférence de presse est également prévue à la date du lancement officiel du produit.

1° - Recensement des tâches à accomplir avec les durées de réalisation probables prévues.

Dénomination des tâches	Signification précise des tâches	Durée de réalisation (en semaine)
A	Préparation détaillée du plan de campagne	2
B	Ecriture des textes	4
C	Illustration	4
D	Passation des contrats avec les journaux	3
E	Fabrication des clichés	2
F	Envoi des clichés aux journaux	1
G	Dessin de l'affiche	8
H	Impression de l'affiche	1
I	Préparation et passation du contrat d'affichage	3
J	Distribution des affiches	1
K	Ecriture des Scripts	3
L	Préparation et signature du contrat portant sur le tournage du film publicitaire	4
M	Tournage du film publicitaire	6
N	Passation du contrat d'émission de T.V	3
O	Envoi du film à la télévision	1
P	Préparation de la conférence finale	4

- Les tâches : B,C,D,E,F concernent la **Presse**
- Les tâches : G,H,I,J concernent l'**Affichage**
- Les tâches : K,L,M,N,O, concernent la **Télévision**

2° - Etablissement des contraintes de succession entre les diverses tâches.

L'agence se donne 2 semaines pour établir un plan détaillé de la campagne après quoi ses représentants commencent à négocier les 4 contrats (presse, affiche, tournage du film publicitaire, télévision). Pendant ces négociations les artistes, dessinateurs et rédacteurs avanceront le plus possible leur travail.

Les illustrations destinées aux journaux seront conçues dans le même temps que l'on rédigera le texte qui doit les accompagner ; on ne pourra fabriquer les plaques d'impression que lorsque les illustrations et le texte seront prêts. Les plaques sont ensuite envoyées aux journaux mais seulement après la négociation du contrat de publicité. Cette partie du travail sera alors terminée.

L'affiche est entre temps dessinée puis imprimée ensuite. La distribution de ces affiches ne se fera qu'après la conclusion du contrat avec la compagnie de publicité terminant ainsi une autre partie de la campagne.

Il faut préparer le texte du film télévisé en même temps que l'on négocie le contrat avec la société qui réalisera le film. Une fois le film terminé, il faut l'envoyer

 © 1996 - Magloire LANHA

à la société qui gère la chaîne de télévision, opération qui ne se fait bien sûr qu'après signature du contrat avec la télévision.

Ce n'est que lorsque toutes les opérations précédentes sont terminées que l'on peut organiser la conférence de presse finale.

3° - Le problème que se pose l'agence: Etablir un calendrier de réalisation du projet prédisant par exemple la date du début d'exécution de chaque tâche, permettant de réaliser le projet dans la durée minimale de temps.

Les données du problème sont synthétisées par le tableau ci-dessous :

Dénomination des tâches	**Contraintes d'antériorité**
A	Ø (Pas de contrainte d'antériorité)
B	A terminée
C	A terminée
D	A terminée
E	B terminée, C terminée
F	D terminée, E terminée
G	A terminée
H	G terminée
I	A terminée
J	H terminée, I terminée
K	A terminée
L	A terminée
M	K terminée, L terminée
N	A terminée
O	M terminée, N terminée
P	A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O terminées

TRAVAIL A FAIRE

1 - Présenter un tableau qui supprime les redondances existant dans le tableau précédent.

2 - Déterminer les rangs des tâches

3 - Construire le graphe MPM en y portant les délais de réalisation des tâches

4 - Déterminer le chemin critique et en déduire la date au plus tôt de la fin du projet.

<u>Exercice 3 - Théorie des Graphes (7 points)</u>

La société Tandy radio spots (TRS) basée à Paris (en France) est la filiale d'une grande entreprise américaine de fabrication et de distribution de microprocesseurs et de micro-ordinateur. Elle jouit d'une très large autonomie de gestion et ne dédaigne pas, à l'occasion, compléter ses activités de base (montage et commercialisation de matériel électronique) par des travaux de conseil en informatique et de mise au point des logiciels.

La direction de la TRS a un objectif prioritaire : être présente sur le marché des micro-ordinateur possédant un logiciel de comptabilité générale et analytique adapté au nouveau plan comptable dès le 1er janvier N+2 .

Pour le lancement de son nouveau modèle de machine PCTRS, la direction envisage l'organisation des opérations selon le tableau de l'annexe.

TRAVAIL A FAIRE

1 - Construire un tableau qui supprime les redondances éventuelles de l'énoncé, ne comprenant que les colonnes «Tâches» et «Antécédentes».

2 - Tracer le graphe MPM en y faisant figurer les dates au plus tôt et au plus tard.

3 - En déduire le chemin critique associé à ce réseau et la durée du projet.

4 - Que se passerait-il si l'opération K (Impression de brochures en Italie) subissait un retard de 21 jours à cause de problèmes douaniers ?

ANNEXE

OPERATION A REALISER POUR MENER A BIEN LE PROJET
Point de départ : 1er Septembre n.
Fin impérative prévue : 31 Décembre n + 1

Tâ-ches	Description	Durée (jours)	Antécé-dentes
a	Premiers contact avec le Conseil National de la Comptabilité	3	e
b	Entrevue avec le Président du Conseil régional de l'Ordre des experts comptables	1	e
c	Séminaire de formation à l'Institut d'Etudes Politique de Paris (initiation)	6	e
d	Séminaire d'approfondissement au CESA	14	c
e	Détermination des objectifs de la société dans le cadre de la politique à long terme	7	-
f	Autorisation de la maison mère TRS Incorporated aux USA après études de faisabilité	25	e
g	Stage chez TRS aux USA, initiation à la nouvelle gamme de produits du groupe et à leur technologie	95	e,f
h	Commande de microprocesseurs	51	e,f,g
i	Contrat d'approvisionnement disquettes	28	e,f
j	Impression des pochettes des disquettes du logiciel	15	o,v
k	Impression des brochures d'utilisation en Italie	45	o,v
l	Présentation du produit à la télévision régionale	14	a,b,f,g, h,i
m	Publicité dans les journaux spécialisés	50	e,f,l
n	Cocktail de présentation à la chambre de Commerce	7	e,f,l
o	Mise en place du service après vente	35	a,b,h,i
p	Formation des formateurs	25	c,d,e,f
q	Formation des vendeurs par les formateurs	15	p
r	Jeu d'essai	10	j,q
s	Analyse organique des traitements	40	l,m,t
t	Analyse fonctionnelle des traitements	10	e,f,g
u	Découpage modulaire des programmes	10	s,t
v	Réaction des programmes en langage évolué	30	n,t,u
w	Rédaction des routines en langage machine	65	o,t,v
x	Test général du logiciel	7	k,r w

Exercice 4 - Théorie des graphes (8 points)

La société Léosud au capital de 6.000.000 F (30.000 actions de nominal 200 F) est une société dirigée par un groupe familial : la famille Léonard. Ses membres ont su conserver, malgré les augmentations successives de capital et une introduction récente en bourse, le contrôle de la société, en détenant 50% des actions.

Cette société, initialement spécialisée dans la fabrication de machines comptables, a pour objet depuis sept ans la fabrication de micro-ordinateurs et la conception des logiciels d'exploitation qui y sont adaptés. Son siège social est situé à Nice (Alpes-Maritimes) où elle emploie 400 personnes pour un chiffre d'affaires d'environ 150 millions de F.

Elle diffuse actuellement un type de micro-ordinateur professionnel avec deux options possibles suivant la capacité de la mémoire centrale 4 ou 8 Mo ; ces appareils sont respectivement dénommés le «Léo I» et le «Léo II».

Les ordinateurs fabriqués par la société Léosud sont adaptés aux normes françaises (clavier AZERTY,...) et les logiciels qui sont proposés ont, tout particulièrement été étudiés sur un plan pédagogique. C'est pourquoi l'on peut distinguer essentiellement deux catégories de clientèles d'inégales importances :

- principalement les établissements d'enseignement : ceux qui dépendent du Ministère de l'Education Nationale, ainsi qu'un certain nombre d'établissements d'enseignement privés.. En effet, grâce à la gamme importante des logiciels pédagogiques proposés, la société Léosud a réussi à obtenir une position importante dans ce secteur.

- accessoirement quelques petites et moyennes entreprises, principalement situées dans le département des Alpes-Maritimes et les départements limitrophes. Ce marché représente approximativement 10% du chiffre d'affaires en N-1 et a été, en pratique, obtenu grâce aux relations personnelles de la famille Léonard.

Les dirigeants de la société Léosud se sont préoccupés de cette situation au cours de nombreuses réunions. Deux problèmes se posent parallèlement :

- la difficulté de tenir les conditions imposées par les marchés publics passés avec le Ministère de l'Education Nationale. Ces marchés imposent en effet des conditions de prix et des délais de paiement qui posent parfois de délicats problèmes de gestion (coût de production) et de trésorerie ;

 © 1996 - Magloire LANHA

- la difficulté de s'implanter auprès des entreprises pour lesquelles le matériel proposé et surtout les logiciels paraissent mal adaptés. En effet, leur qualité pédagogiques leur fait perdre de l'efficacité lors de leur exploitation en ralentissant considérablement la vitesse d'exécution de certains programmes par rapport au matériel que proposent les concurrents.

M. Albert a proposé lors d'une réunion de s'orienter plutôt vers le marché des micro-ordinateurs familiaux, arguant que ce qui est inconvénient vis-à-vis des entreprises deviendrait ici un atout de choix puisque le caractère pédagogique faciliterait les manipulations des acheteurs non initiés à l'informatique.

Ayant approfondi son idée, M. Albert Léonard propose de lancer sur le marché un micro-ordinateur dont la conception interne serait exactement celle du «Léo I», mais dont l'apparence extérieure (le «look» selon son expression) serait modernisé pour satisfaire les goûts d'une clientèle plus orientée vers les activités ludiques. M. Laurent, directeur de la production, approuve cette proposition et estime qu'elle ne devrait pas entraîner de grandes difficultés pour ses services.

Cette idée a finalement été adoptée par le conseil d'administration réuni le 5 janvier N. Mais ce dernier ne veut pas se lancer dans «l'aventure de l'ordinateur familial !» selon l'expression de M. Bernard Léonard, sans avoir étudié avec précision dans quelle mesure ce projet peut être réalisé.

La direction profite de cette occasion pour introduire dans la société la gestion budgétaire. Elle demande donc de procéder à une étude de rentabilité du nouveau produit à 5 ans. Le conseil estime que l'ensemble des budgets doit être achevé au 31 octobre afin que la décision finale étant prise, l'éventuelle mise en place puisse être réalisée dans de bonnes conditions avant le début de l'année N+1. A cet effet, les différentes étapes (ou tâches) à accomplir lors de l'établissement des budgets ont été recensées et leur durée respective a été évaluée.
La liste de ces tâches, les conditions d'antériorité vous sont communiquées en annexe.

TAF
Le conseil, peu familiarisé avec la gestion budgétaire, consulte votre cabinet d'expertise comptable. Il vous demande :

1 - en respectant les conditions d'antériorité (encore appelées contraintes de succession), de présenter l'enchaînement des opérations sous forme de graphique MPM en y faisant figurer les dates au plus tôt et au plus tard.

2 - d'en déduire le chemin critique associé à ce réseau et la durée du projet.

ANNEXE

Tâches	Description	Durée (jours)	Antécédentes
A	Budget de trésorerie	5	Q, Y
B	Etude de marché	40	-
C	Détermination des goulets concernant les facteurs de production (main d'œuvre, machine)	15	S
D	Fixation des prix de vente	4	B
E	Prévision de sous-traitance	2	C
F	Analyse des charges de distribution	5	K
G	Budget des approvisionnements	8	R
H	Plan d'amortissement	2	U
I	Budget de TVA	1	N,G
J	Prévision en matière de recours au crédit bancaire à court terme	4	A
K	Prévision des charges de distribution	2	N
L	Calcul de la marge unitaire	1	P,K
M	Prévision des charges de production	6	P
N	Etablissement du budget des ventes	8	D,S
O	Bilan prévisionnel	3	T,L,J
P	Analyse des charges de production	10	S
Q	Budget des recettes	3	V,N,X
R	Prévision des approvisionnements (quantité, dates des commandes, prix, dates de livraison)	12	W
S	Prévision de ventes en volume	3	B
T	Compte de résultat prévisionnel	2	K,M,R, H,N,E
U	Prévision d'investissements (date de commande, date de livraison, date de paiement)	10	C
V	Prévision des délais de crédit (clients et fournisseurs)	6	B
W	Programme de production	8	C
X	Prévision de financement (augmentation de capital, recours à l'emprunt)	10	U
Y	Budget des dépenses	5	L,M,U, V,F

© 1996 - Magloire LANHA

EXERCICE N° 5

On prépare un jardin comprenant une allée traversant une pelouse. Pour faire l'allée, on étale un asphalte tout prêt sur une couche de hérisson (e) , puis on passe au rouleau compresseur pour le faire durcir (f). Il faut commander et faire livrer le hérisson et l'asphalte (d). Par ailleurs, la pelouse doit être labourée (b) avant que l'allée ne soit commencée (c). Elle est ensuite semée (g). On doit réceptionner au point de départ des travaux proprement dits, tous les matériaux (a). L'inauguration (z) n'a lieu qu'après la fin de l'arrosage. Les durées des tâches suivent :

a - Commander et réceptionner tous les matériaux........................ 15 jours
b - Labourer la pelouse.. 3 jours
c - Creuser l'allée.. 2 jours
d - Faire Livrer le hérisson et l'asphalte... 1 jour
e - Etaler le hérisson et l'asphalte.. 2 jours
f - Passer l'asphalte au rouleau compresseur.................................. 1 jour
g - Semer la pelouse... 5 jours
h - Arroser la pelouse.. 1 jour.

1 - Ecrire le dictionnaire des précédents selon l'énoncé. Exploiter les transitivités ou dominances éventuelles pour le simplifier à son expression minimum.
2 - Etablir les niveaux des tâches
3 - Produire le graphe MPM correspondant en y faisant figurer les dates au plus tôt et au plus tard
4 - Enoncer le chemin critique, et la durée totale du travail.
5 - Quelle est l'impact d'un retard de deux jours de la tâche (f) sur l'inauguration (z) ?

EXERCICE N° 6

Une agence doit réaliser un projet avec des contraintes résumées dans le tableau ci-après.

Tâches	Tâches antérieures	Durée en mois
A	B, D	5
B	-	8
C	F	2
D	B	3
E	B, C, F	5
F	-	1

1 - Présenter un tableau qui supprime les redondances éventuelles du tableau précédent.
2 - Déterminer les niveaux des tâches.
3 - Tracer le graphe du projet et déterminer le ou les chemins critiques, en indiquant sur le graphe les dates au plus tôt et les dates au plus tard.
4 - En quel temps minimum le projet pourra-t-il être inauguré ?
5 - Dresser un tableau des marges de flottement (marges totales) et des marges libres.

 © 1996 - Magloire LANHA

Titre 3 : Théorie des Jeux

Chapitre 1 : Notion Générales

<u>1 Typologie des Jeux</u>

- Selon le nombre de personnes :
  * Jeux à deux personnes
  * Jeux à plus de deux personnes
- Selon la perfection de l'information
  * Jeu à information parfaite (le ludo, le jeu de dames, les échecs),
  * Jeu à information imparfaite (duopole, concurrence monopolistique)
- Selon le nombre de coup ou de séquence
  * jeu à un seul coup
  * jeu séquentiel
- Selon le résultat
  * jeu à somme nulle (les uns ne gagnent que ce que perdent les autres)
  * jeu à somme non nulle (positive ou négative)
- Selon la collusion
  * jeu coopératif
  * non jeu coopératif

Le *Dilemme du prisonnier* est un jeux non coopératif à somme non nulle.
L'enquête auprès de deux personnes soupçonnées mais présumées innocentes.
Le tableau ci-dessous contient les peines que *promet* l'Enquêteur à ses prévenus ()

			Personne B	
			Avoue	N'avoue pas
Personne A	Avoue	Peine de A	50 ans	25 ans
		Peine de B	50 ans	75 ans
	N'avoue Pas	Peine de A	75 ans	Acquittement
		Peine de B	25 ans	Acquittement

Les deux prévenus sont séparés et informés du tableau des résultats. De manière générale, une telle matrice conduit rarement à l'acquittement si délit il y a eu, car aucun prévenu ne voudrait couvrir l'autre à ses propres frais.

- Exemple de jeu à somme nulle : L'ensemble des joueurs de la loterie et l'Entreprise émettrice de Loterie. Cette entreprise ne gagne que dans la mesure où l'ensemble des joueurs perd. Il n'y a pas de création nouvelle de richesse, mais juste un transfert de l'ensemble des joueurs en faveur de l'Entreprise.

2 - Tableau de causalité du jeu

Note : On s'intéresse dans ce cours d'introduction aux jeux <u>non coopératifs</u> à <u>information parfaite</u> de <u>deux personnes</u> à <u>somme nulle</u>. Cela permet deux simplifications pour la théorie :

- Deux personnes => Matrices de dimension 2 de type m x n
  m : nombre de décisions ou tactiques du joueur A
  n : nombre de décisions ou tactiques du joueur B

- Somme nulle : Les gains de A sont les pertes de B et vice versa. Dans l'exemple de l'Enquêteur, on a deux valeurs de résultats pour chaque croisement de tactique et la matrice des résultats contient 8 valeurs. En somme nulle, il suffit d'exprimer les résultats de l'un et ceux de l'autre sont automatiquement connus (on aurait alors 4 valeurs au lieu de 8). Dans la suite, sauf précision contraire, les résultats du tableau seront toujours ceux du joueur en ligne, ici A.

Sous ces hypothèses, la matrice des gains du joueur A peut se présenter comme suit.

		Personne B	
		Avoue	N'avoue pas
Personne A	Avoue	50 ans	25 ans
	N'avoue pas	75 ans	Acquittement

Chaque "Joueur" attribue à chaque valeur du tableur une "utilité". Une peine dans le cas des suspects ci-dessus a une valeur négative sur l'échelle de l'utilité.

Chapitre 2 : Jeux de deux personnes à somme nulle

1. Hypothèses et données du problème

H1 : jeu à deux personnes
H2 : jeu à somme nulle
H3 : les valeurs a_{ij} du tableau sont les résultats du joueur A lorsqu'il joue la tactique i et que B joue j. Un $a_{ij} > 0$ signifie un gain pour A et une perte de la même valeur pour B (et inversement). On dit alors que A est un joueur maximisant et B un joueur minimisant.
H4 : l'objectif de chaque joueur est d'obtenir le meilleur résultat possible
H5 : le jeu est à un seul coup, c'est-à-dire que la décision n'est pas décomposée en une suite de décisions.
H6 : chaque joueur est dans l'ignorance totale de la décision de l'autre.
H7 : les joueurs sont <u>prudents</u> et <u>intelligents</u>. (ils ne se laissent pas aller à un optimiste ou un pessimisme, ni à la prise de risques évidents; chaque joueur estime que son adversaire est également intelligent et prudent). C'est le comportement de Abraham WALD ou de John Von NEUMANN.

Les données du problème sont résumées dans le tableau des gains de A ci-après.

		Tactiques du joueur B					
		1	.....	h	j	....	n
Tactiques du joueur A	1						
	….						
	i			a_{ih}	a_{ij}		
	k			a_{kh}	a_{kj}		
	….						
	m						

2 - Définitions

2.1 - Lorsque la partie comporte un seul coup, on appelle **tactique** ou **stratégie pure**, la décision de chaque joueur.

2.2 - Le **risque d'une tactique** est le plus mauvais résultat possible relative à cette tactique.
2.3 - Une **tactique prudente** comporte le risque le plus faible.

		Tactiques du joueur B			
		1	**2**	**3**	**4**
Tactiques du joueur A	**1**	2	0	1	1
	2	2	4	-1	0
	3	3	1	4	2

Le risque du Joueur maximisant A

Tactique	Risque (plus faible gain)
1	0
2	-1
3	1

Sa tactique prudente est la tactique **3**.

Le risque du Joueur minimisant B

Tactique	Risque (plus forte perte de B = plus gros gain de A)
1	3
2	4
3	4
4	2

Sa tactique prudente est la tactique **4**.

2.4 - **Dominance :** Une tactique **k** d'un joueur maximisant A **domine** une autre tactique **i** du même joueur si les gains a_{kj} sont supérieurs au gains a_{ij} pour j décrivant l'ensemble des tactiques adverses (soit : $1 \leq j \leq n$). Dans ce cas le tableau de jeu peut être allégé de la tactique non pertinente **i**. La **réduction du jeu par domination** consiste à supprimer dans l'ensemble des stratégies de chaque joueur, celles qui sont dominées.

Exemple

 © 1996 - Magloire LANHA

		Tactiques du joueur B			
		1	2	3	4
Tactiques du joueur A	1	2	0	1	1
	2	2	4	-1	0
	3	3	1	4	2

Pour le Joueur maximisant A : **3** domine **1**
Pour le Joueur minimisant B : **4** domine **1**

d'où le jeu réduit :

		Tactiques du joueur B		
		2	3	4
Tactiques du joueur A	2	4	-1	0
	3	1	4	2

3 - Règle fondamentale en comportement prudent et intelligent

Th1 : Le **joueur maximisant** A fait son choix en deux étapes :
- d'abord évaluer les risques de chaque tactique (minimum de gain possible)
- sélectionner parmi elles, la tactique qui offre le gain maximum (maximum dans l'ensemble défini par les min)

Cette approche est dite règle du **MaxiMin.**

Remarque : L'objectif de chaque joueur étant de maximiser son gain, le même théorème s'applique pour B. Mais comme le tableau représente les gains de A, pour optimiser pour B, il faut :
- soit remplir le tableau avec les valeurs opposées de celle de A
- soit employer le corollaire du Th1 énoncé ci-après comme la règle du MiniMax.

Corollaire de Th 1 : Le **joueur minimisant** B fait son choix en deux étapes :
- d'abord évaluer les risques de chaque tactique (maximum de perte possible)
- sélectionner parmi elles, la tactique qui offre la perte minimum (minimum dans l'ensemble défini par les max)

Cette approche est dite règle du **MiniMax.** Dans le corollaire il faut se rappeler qu'on utilise le tableau des gains de A sans changement de signe.

Définition : Lorsque le Maximin(A) = MiniMax(B), on dit que le jeu a un **point d'équilibre** qui est à l'intersection des deux stratégies.

Application 1 : Jeu sans point d'équilibre

		Tactiques du joueur B		
		2	3	4
Tactiques du joueur A	2	4	-1	0
	3	1	4	2

Pour le Joueur A (joueur maximisant)

1ère étape : Recherche des gains Minimum

Si A joue la tactique 2, B jouera sa tactique 3 et le gain de A sera -1
Si A joue la tactique 3, B jouera sa tactique 2 et le gain de A sera +1

2ème étape : Choix du Max dans l'ensemble précédent

A choisira la tactique 3 et gagnera +1, B choisissant sa tactique 2

Remarque : La même approche peut être utilisée pour B en déterminant d'abord le tableau des gains de B.

Pour le Joueur B (joueur minimisant) : Utilisation du corollaire du Théorème fondamental

Rappel : B est dit minimisant il cherche simplement à minimiser les gains de son adversaire, ce qui revient, en jeu à somme nulle, à maximiser son propre gain.

© 1996 - Magloire LANHA

1ère étape : Recherche des pertes Maximum

Si B joue la tactique 2, A jouera sa tactique 2 la perte de B sera 4
Si B joue la tactique 3, A jouera sa tactique 3 la perte de B sera 4
Si B joue la tactique 4, A jouera sa tactique 3 la perte de B sera 2

2ème étape : Choix du Min dans l'ensemble précédent

B choisira la tactique 4 et perdra 2, A choisissant sa tactique 3.

Le jeu n'a pas de point d'équilibre puisque le MaxiMin(A) ≠ MiniMax(B)

Application 2 : Jeu avec point d'équilibre

		I	II	III		Min	
Tactiques du joueur A	I	-1	0	4		-1	
	II	4	1	-2		-2	
	III	3	2	3		2	MaxiMin
Joueur B							
	Max	4	2	4		Concordance	
			MiniMax				

Le jeu possède un point d'équilibre : A joue sa stratégie III,
B joue sa stratégie II, et le gain de A est de 2 équivalant à une perte de B de 2.

N.B. Pour qu'un équilibre existe, il ne suffit pas d'avoir l'égalité mathématique MaxiMin(A)=Minimax(B). La condition nécessaire et suffisante est : le couple qui a présidé à la détermination du MaxiMin(A) doit être identique à celui qui a présidé au à la détermination de MiniMax(B).

Chapitre 3 : Choix d'un critère dans l'incertitude

1. Données du problème

L'entreprise PERISH fabrique un bien périssable. Elle ne connaît pas sa demande journalière a priori, mais elle a fait des hypothèses de productions vendables. Si la quantité produite est inférieure à la demande, il y a une perte d'opportunité. Par contre, si la production est supérieure à la demande, les invendus sont bradés.

Le bureau d'étude interne de PERISH a produit la matrice des bénéfices, mais ne peut aller plus loin dans le travail de décision. En ligne figurent les productions possibles. En Colonne figurent les demandes possibles.

	80	90	100	110	120
80	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
90	0,6	1,1	1,1	1,1	1,1
100	0,4	0,9	1,4	1,4	1,4
110	0,2	0,7	1,2	1,7	1,7
120	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0

Le Directeur Général de PERISH vous consulte en tant qu'*Expert en Théorie de la décision*. Vos termes de référence (TDR) : proposer des objectifs en expliquant les avantages et les inconvénients, puis en évaluer les résultats pour PERISH.

2. Transposition du Thème en Théorie des jeux

- Le cas PERISH est un jeu à somme non nulle entre l'Entreprise et la Nature.

- Les quantités produites constituent les stratégies du Joueur maximisant : PERISH.

- Les quantités demandées peuvent être considérées comme la réponse *adverse* de la Nature : chaque réalisation est un *état de la nature.* Parmi tous les états, un seul se produit effectivement par unité de temps comme le résultat d'un lancer d'une pièce est : soit pile soit face.

- L'objectif de PERISH est de maximiser son bénéfice. Quand elle ne produit pas suffisamment par rapport à la demande, elle a un manque à gagner : elle perd l'opportunité de gagner. Lorsque voulant gagner davantage elle produit plus, elle court le risque de perdre tout son bénéfice et même de faire des pertes (Offre largement supérieure à 120) si la demande n'est pas au rendez-vous.

© 1996 - Magloire LANHA

- Le jeux n'est pas à somme nulle, car la Nature ne perd rien ; par contre l'entreprise peut perdre. La nature n'a pas pour objectif de maximiser son gain au sens d'entraîner des pertes pour l'entreprise, ni de minimiser ses pertes au sens d'entraîner des coûts pour l'entreprise.

La demande dans ce cas est considérée comme **aléatoire**. La **Nature** est un concept utilisé juste pour représenter l'**incertitude**. Les réalisations possibles sont alors appelées des **états de la nature**.

Note : La **micro-économie** offre une série de formalisations : duopole, monopole, monopsone, oligopole, etc. où les réactions sont beaucoup plus interactives. (Cf. cours de micro-économie).

La **théorie financière** donne des exemples de jeu contre la Nature : quel sera le cours de mon titre x demain au moment de sa vente ? Ce cours peut m'être favorable comme défavorable. La Nature n'est donc pas un adversaire. D'autre part mon offre n'influe pas de manière perceptible sur le cours du titre (hypothèse d'atomicité) : il n'y a pas une réponse systématique à ma tactique.

- La Nature n'a pas le comportement *prudent et intelligent* de von NEUMANN. Mieux, elle n'a pas pour objectif de faire perdre à l'Homme. Par conséquent, le critère classique de MaxiMin ne peut s'appliquer systématiquement. En conséquence il faut définir des critères qui sont tous **subjectifs**, d'où la nécessité de bien comprendre les comportements sous-jacents aux règles de décision ci-après.
NOTE

Comme la Nature ne joue pas au sens de Neumann, il y a toujours une solution dans les *jeux contre la Nature.* **Il n'est donc pas question de vérifier l'existence de point selle** au sens de Neumann. La solution est en elle-même **subjective**. Elle consiste à attribuer **arbitrairement** une stratégie à la nature selon sa propre **attitude face au risque**.

Dominance

Il faut faire attention lors de la réduction par dominance dans les jeux contre la Nature.

- Pour le joueur maximisant en ligne (l'entreprise), la dominance a un sens : une ligne ou tactique qui rapporte dans tous les cas plus qu'une autre domine cette dernière.

- *Par contre la Nature n'a pas d'objectif*. On ne peut formuler de manière classique une règle de dominance qui ait un sens sans lui prêter (ou découvrir ?) un objectif. Les critères en théorie des jeux sont dits **intelligents** parce qu'ils sont basés sur un objectif de jeu conforme au comportement de l'*homo economicus*.

3. Les principaux critères de choix dans l'incertitude

3.1 - Critère de Laplace : espérance mathématique

3.1.1 - Fondements théoriques

Les états de la nature se produisent avec une probabilité qui constituent les règles stratégiques de la nature. A chaque jeu j ou réalisation de la nature est associée une probabilité inconnue pj.

L'**espérance mathématique** d'un jeu en ligne i est alors :

$$E_i = \sum p_j a_{ij} \qquad \text{pour } j=1 \text{ à } n \qquad (\sum p_j = 1 \text{ pour } j=1 \text{ à } n)$$

Laplace considère que les états de la nature ont une **équiprobabilité** de réalisation $p_j = 1/n$ pour j=1 à n, d'où sa simplification :

$$L_i = \sum a_{ij} / n \qquad \text{pour } j=1 \text{ à } n$$

Le **critère de Laplace** est alors : Choisir la ligne qui donne la plus forte espérance mathématique de gain en états équiprobables.

Avantage : Comme tous les critères ci-après, celui de Laplace permet de lever l'indétermination qui bloque le bureau d'étude interne de PERISH en formulant clairement une hypothèse.

Inconvénient : il est nécessaire de déterminer des états de la nature assez équiprobables ou dont la dispersion n'est pas forte en terme d'incidence financière. Si les événements ne sont pas réellement équiprobables, pour plusieurs répétitions de l'expérience, la stratégie sera biaisée. Le biais peut profiter à l'entreprise ou lui être défavorable. Il n'y a donc pas d'inconvénient systématique.

3.1.2 - Application

Calcul

i=1	L1 = 0,8
i=2	L2 = 1,0
i=3	L3 = 1,1
i=4	L4 = 1,1
i=5	L5 = 1,0

Décision

Les hypothèses de production i=3 et i=4 donnent un Li identique le plus élevé. En considérant que la probabilité de réalisation des différentes hypothèses de la demande sont identiques, PERISH a intérêt à choisir l'hypothèse 3 ou 4 du point de vue de Laplace.

La nouvelle indétermination peut être levée en introduisant un second critère :

Exemple 1 : PERISH est une entreprise privée de type *capital intensive. Son objectif est de maximiser son profit en réduisant ses risques.* Les capitaux risqués sont plus importants en i=4 qu'en i=3. Il faut alors produire i=3, soit 100 unités par jour.

Exemple 2 : PERISH est une entreprise d'Etat-providence de type HIMO (Haute Intensité de Main d'Oeuvre ou *labour intensive*). Son objectif est de produire au maximum pour satisfaire le plus de personnes et en employant plus de main d'oeuvre : il faut produire i=4 soit 110 par jour.

3.2 - Critère de Wald (ou de Neumann) : MaxiMin ou critère dit pessimiste

3.2.1 - Fondements théoriques

L'approche de **Wald** n'est pas différente de la règle du MaxiMin. Elle consiste à choisir la stratégie qui procure le plus grand parmi les plus petits gains (MaxiMin). Elle est identique au critère de Neumann.

C'est une stratégie **prudente**, mais elle consiste en fait à prêter à la nature un *caractère agressif* qu'elle n'a pas toujours. Elle est alors parfois dite **pessimiste :** pourquoi *croire* que la nature qui n'est pas nécessairement un adversaire vous opposerait la réalité la plus néfaste à chacune de vos tactiques comme si elle était un joueur de Neumann (dans un jeu à somme nulle) ?

Avantage : C'est un critère **prudent** qui permet de choisir la tactique qui assure un certain minimum quels que soient les états de la nature ... qu'il pleuve ou qu'il neige ! Toutefois, elle ne convient qu'aux personnes ayant une aversion pour le risque*, ou plutôt* celles qui ont une attitude prudente face au risque, les individus que la Théorie financière considère comme normaux. Il ne s'agit pas d'un avantage à proprement parler.

Inconvénient : Les *risk-lovers* parleront d'excès de prudence, de stratégie *minimaliste*. Cette stratégie ne leur convient pas. il ne s'agit donc pas d'un inconvénient à proprement parler, mais d'incompatibilité de tempérament face au risque.

3.2.2 - Application

Calcul

i=1 Min a1[j] = 0,8 Max[i]Min ai[j] : L'entreprise produira 80 unités
i=2 Min a2[j] = 0,6
i=3 Min a3[j] = 0,4
i=4 Min a4[j] = 0,2
i=5 Min a5[j] = 0,0

Fortuitement, il y a un point selle comme dans le jeux de Neumann.

j=1 Max a[i]1 = 0,8 Min[j]Max a [i]j : L'entreprise produira 80 unités
j=2 Max a[i]2 = 1,1
j=3 Max a[i]3 = 1,4
j=4 Max a[i]4 = 1,7
j=5 Max a[i]5 = 2,0

L'entreprise joue sa tactique 1 (produit 80) et la nature joue aussi sa stratégie 1 (demande = 80). Offre = Demande.

Il est **rappelé** que la nature n'a pas pour objectif de minimiser les gains de l'entreprise. La nature ne représente que l'**incertitude** dans ce cours.

Décision

Au sens de Wald, PERISH a intérêt à choisir l'hypothèse de production i=1 qui procure à l'entreprise un gain de 0,8 en tout état de cause.

 © 1996 - Magloire LANHA

3.3 - Critère optimiste : MaxiMax

3.2.1 - Fondements théoriques

Le critère **optimiste** consiste à *croire* que Dame Nature sera favorable à l'Entreprise et à choisir l'état de la nature le plus favorable.

Par rapport au critère de **Laplace** il consiste à donner une probabilité de réalisation nulle à tous les états de la nature autre que le plus favorable et la probabilité de un (certitude) à ce dernier état. C'est une stratégie **imprudente.**

Avantage : C'est un critère qui permet de gagner très gros en cas de succès !

Inconvénient : C'est un critère **imprudent**. Rappelons que si on fait intervenir la nature dans le problème, c'est bien parce qu'il y a une incertitude. C'est **insensé** de croire qu'un état a une probabilité certaine de réalisation **en incertitude**. C'est simplement dire qu'il n'y a pas d'incertitude. Si les jeux étaient faits, il n'y a plus de décision à prendre ! Toutefois, ce tempérament correspond à celui des *risk-lovers*.

3.2.2 - Application

Calcul
MaxiMax = 2,0 correspondant à la tactique i=5, soit une production de 120 pour une demande de 120.

Décision
L'entreprise appliquera la tactique i=5, soit une production de 120 pour une demande connue d'avance de 120 et réalisera un bénéfice de 2.

3.4 - Critère de Hurwicz : dosage subjectif entre pessimisme et optimisme

3.3.1 - Fondements théoriques

Hurwicz ne fait qu'une combinaison convexe entre pessimisme et optimisme, les deux critères précédents.

Soit α, le coefficient d'optimisme : $0 \leq \alpha \leq 1$.
Si $\alpha = 1$: la personne est **hyper-optimiste**
Si $\alpha = 0$: la personne est **hyper-pessimiste**
Toute valeur intermédiaire est dite **modérée :** $0 < \alpha < 1$

α mesure donc l'attitude de l'individu face au risque et est spécifique à chaque personne à un moment donné.

Soit Ai le plus fort gain et ai le plus petit gain de la ligne tactique quelconque i.

Le critère de Hurwicz consiste à choisir la tactique i* qui maximise la quantité :
$h = \alpha \, Ai + (1-\alpha) \, ai.$

On vérifie que
- si α=1 on est dans le cas de MaxiMax, l'hyper-optimiste.
- si α=0 on est dans le cas de MaxiMin, l'hyper-pessimiste de Wald-Neumann.

REMARQUES

- Le critère de Hurwicz, vu comme un cas particulier de celui d'espérance mathématique
Le critère de Hurwicz peut se généraliser pour se rapprocher de celui de Laplace. On peut considérer que le problème de Hurwicz est celui d'une nature manichéenne n'ayant que deux états possibles : Bien ou Mal, auxquelles sont associées les probabilités α et $(1-\alpha)$. La quantité hi est alors l'espérance mathématique de la tactique i. Dans le cas où on veut prendre en compte les valeurs intermédiaires, on obtient une formule générale d'espérance mathématique. **Le critère de Hurwicz, est donc un cas particulier de celui d'espérance mathématique.**

- Le critère de Laplace comme critère d'un joueur risque-neutre.
Le joueur de Laplace attribuant la même probabilité aux différents états de la nature est dit alors **risque-neutre**.

Avantage :
- Critère unifiant toutes les approches précédentes : MiniMax, MaxiMin, Laplace.
- Critère **dosé** ou plutôt **dosable.**

Inconvénient : Le α optimal est inconnu et bien sûr tout est laissé au tempérament de l'individu comme on s'y attend dans ce chapitre 3.

 © 1996 - Magloire LANHA

3.1.2 - Application
Calcul
Deux hypothèses α = 0,1 et α = 0,9

	Ai	ai	α = 0,9 α Ai + (1-α)ai	α = 0,1 α Ai + (1-α)ai
i=1	0,8	0,8	0,8	0,80
i=2	1,1	0,6	1,05	0,65
i=3	1,4	0,4	1,30	0,50
i=4	1,7	0,2	1,55	0,35
i=5	2,0	0,0	1,80	0,20
Tactique optimale			i* = 5	i* = 1

Décision

- Pour un coefficient d'optimisme de 10%, la meilleur tactique est i = 1
- Pour un coefficient d'optimisme de 90%, la meilleur tactique est i = 5

3.5 - Critère de Savage : critère de regret minimum

3.3.1 - Fondements théoriques

Alors que les quatre précédentes méthodes n'en font qu'une seule, la méthode de Savage est basée sur une autre philosophie : celle du regret.

Par comparaison, un optimiste peut éprouver du remords (pour **avoir agi** dans le sens d'une maximisation aveugle) alors qu'un pessimiste peut éprouver du regret (pour **n'avoir pas agi** dans le même sens, mais plutôt celui de la minimisation du risque).

Savage construit la matrice des regrets définie par :
rij = aij - Max[r]arj (ce qui implique rij $\leq$0).

Le **critère de Savage** consiste à choisir le regret minimum ; comme les rij sont négatifs, cela revient à prendre la ligne correspondant aux Max[i] Min[j] rij.
- Min[j] rij : permet de déterminer le regret le plus élevé (pire des choses pour n'avoir pas visé haut !)
- Max[i] Min[j] rij prend le mieux des pires ...

Avantage :
- Critère prudent

Inconvénient
- Critère minimaliste.

3.1.2 - Application
Calcul

	80	90	100	110	120	Min[j] rij
80	0,0	0,0	0,0	0,0	0	0
90	-0,5	0	0	0	0	-0,5
100	-1,0	-0,5	0	0	0	-1,0
110	-1,5	-1,0	-0,5	0	0	-1,5
120	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0	-2,0

Max[i] Min[j] rij

Décision
Selon le critère de Savage, il faut choisir la tactique i=1 qui correspond à une production de 80 unités.

CONCLUSION

Il n'y a pas de solution universelle en cas d'incertitude. Ici interviennent l'expérience, le flair, les facteurs subjectifs : dans les plus grandes places financières on parle couramment de *guru*. Le but de ce chapitre était d'éclairer les décisions en avenir incertain. L'espérance mathématique joue un grand rôle en Théorie de la décision en environnement incertain

 © 1996 - Magloire LANHA

4 - Exercices d'entraînement

EXERCICE N° 1

L'entreprise PERISH fabrique un bien périssable. Elle ne connaît pas sa demande journalière a priori, mais elle a fait des hypothèses de productions vendables. Si la quantité produite est inférieure à la demande, il y a une perte d'opportunité. Par contre, si la production est supérieure à la demande, les invendus sont bradés.

Le bureau d'étude interne de PERISH a produit la matrice des bénéfices, mais ne peut aller plus loin dans la prise de décision. En ligne figurent les productions possibles. En colonne figurent les demandes possibles.

	80	90	100	110	120
80	0,8	0,8	0,8	0,8	0,8
90	0,6	1,1	1,1	1,1	1,1
100	0,4	0,9	1,4	1,4	1,4
110	0,2	0,7	1,2	1,7	1,7
120	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0

Le Directeur Général de PERISH vous consulte en tant qu'*Expert en Théorie de la décision*. L'objectif de PERISH est de maximiser son bénéfice.

Termes de référence
Déterminer la tactique optimale et exprimer l'offre de l'entreprise et son résultat selon chacun des quatre critères suivants :
1 - Critère de Laplace : espérance mathématique
2 - Critère de Wald (ou de Neumann) : MaxiMin ou critère dit pessimiste
3 - Critère optimiste : MaxiMax
4 - Critère de Hurwicz : dosage subjectif (α) entre pessimisme et optimisme
avec deux hypothèses sur α :
α= 0,1
et α= 0,9.

Exercice 2

Une entreprise lance des cours de langue par cassettes. La demande peut être de 1.000, 2.000, 3.000, 4.000 ou 5.000 unités de cours.

Le coût fixe total de création du cours est de 100.000 F. Le coût variable par jeu de cassettes (formant une unité de cours) est 200 F.

Chaque jeu de cassette se vend à 400 F. Pour des raisons de prestige les invendus ne peuvent être soldés : on liquide alors les cassettes effacées à 117 F le jeu. L'effacement d'un jeu coûte 17 F.

Toutes les cassettes produites doivent l'être en même temps : l'entreprise doit décider du nombre de cours qu'il faut produire pour maximiser son bénéfice.

Vous êtes consulté(e) pour formaliser et résoudre le problème de la firme qui se ramène à un jeu à un joueur ; l'entreprise joue comme offreur contre le hasard qui intervient ici au niveau de la demande.

TERMES DE REFERENCE

1 - Formaliser le problème de la firme par une matrice de jeu. Les demandes seront en colonnes et les hypothèses de production des mêmes quantités en lignes. A l'intersection des lignes et colonnes figureront les résultats de la firme. Les bénéfices seront clairement précédés du signe + et les pertes du signe -.

2 - Déterminer la tactique optimale et exprimer l'offre de l'entreprise et son résultat selon chacun des cinq critères suivants :
2.1 - Critère de Laplace.
2.2 - Critère de Wald-Neumann : MaxiMin
2.3 - Critère optimiste : MaxiMax
2.4 - Critère de regret minimum: MiniMax
2.5 - Critère de Hurwicz avec une dose d'optimisme α= 0,6.

3 - Faire un bref exposé comparatif entre les critères de Laplace et de Hurwicz.

© 1996 - Magloire LANHA

Exercice 3

Soit le jeu à deux joueurs, appelés A et B, représenté par le tableau ci-après. Cette matrice représente les gains (+) ou pertes(-) du joueur A. C'est un jeu à somme nulle : tout ce que gagne un joueur est perdu par son adversaire.

Joueur B / Joueur A	Stratégie 1	Stratégie 2	Stratégie 3
Stratégie 1	+5	+4	+4
Stratégie 2	+9	+3	+2
Stratégie 3	-5	+2	-1
Stratégie 4	0	+3	+2

TRAVAIL A FAIRE

1 - Etudier la dominance des stratégies de chaque joueur puis présenter le tableau réduit.
2 - Ce jeu possède - t - il un point d'équilibre ? Si oui, le déterminer.

EXERCICE 4

Une entreprise lance des cours de langue par cassettes. La demande peut être de 1.000, 2.000, 3.000, 4.000 ou 5.000 unités de cours. Le coût fixe total de création du cours est de 100.000 F. Le coût variable par jeu de cassettes (formant une unité de cours) est 200 F. Chaque jeu de cassette se vend à 400 F. Pour des raisons de prestige les invendus ne peuvent être soldés : on liquide alors les cassettes effacées à 110 F le jeu. L'effacement d'un jeu coûte 10 F. Toutes les cassettes produites doivent l'être en même temps : l'entreprise doit décider du nombre de cours qu'il faut produire pour maximiser son bénéfice.

Vous êtes consulté(e) pour formaliser et résoudre le problème de la firme qui se ramène à un jeu : l'entreprise joue comme offreur contre le hasard qui intervient ici au niveau de la demande.

TERMES DE REFERENCE

1 - Formaliser le problème de la firme par une matrice de jeu. Les demandes seront en colonnes et les hypothèses de production des mêmes quantités en lignes. A l'intersection des lignes et colonnes figureront les résultats de la firme. Les pertes seront inscrites entre parenthèses.

2 - Déterminer la tactique optimale et exprimer l'offre de l'entreprise et son résultat selon chacun des cinq critères suivants :
2.1 - Critère de Laplace.
2.2 - Critère de Wald-Neumann : MaxiMin
2.3 - Critère optimiste : MaxiMax
2.4 - Critère de Hurwicz avec une dose d'optimisme α= 0,6.

© 1996 - Magloire LANHA

Titre 4 : Phénomènes d'attente[3]

Chapitre 1 : Introduction aux problèmes d'attente

1.1 - L'exemple introductif : La coiffure

M. Big ONE, le président de HardSell Corporation, a un coiffeur Georges BARBER qui arrive à son bureau une fois par semaine pour lui couper les cheveux. Tom BOSS, son Directeur Général va se faire coiffer chez le coiffeur John COIFFURE qui a une seule chaise opérationnelle.

Georges BARBER visite aussi des P.D.G. dans la ville. Il arrive que Georges attende les P.D.G. parfois occupés (en réunion par exemple) avant de pouvoir les coiffer. Tom BOSS trouve généralement des clients arrivés avant lui à John COIFFURE.

Ces situations ont en commun quelques caractéristiques :
(1) **un service** : la coupure des cheveux
(2) **une station de service** : l'ensemble représenté par le coiffeur et ses outils
(3) **des clients** qui demandent le service : les personnes qui veulent être coiffées
(4) **une règle d'attente** qui détermine l'ordre dans lequel les personnes seront servies : pour M. Big ONE, c'est un système de rendez-vous ; pour Tom BOSS, c'est la règle du premier-arrivé, premier-servi (FIFO)

Ces situations impliquent des conflits dans les objectifs de chacun. George BARBER n'aimerait pas attendre une fois arrivé dans le bureau des P.D.G. même si son tarif a plus ou mois été étudié en prenant en compte ce risque. M. Big ONE ne voudrait pas non plus que George BARBER arrive en retard à son rendez-vous.

M. Tom BOSS n'aimerait pas voir des personnes en attente avant son arrivée. Il voudrait être servi aussitôt venu[4]. John COIFFURE voudrait toujours avoir au moins une personne en attente dans sa file pour ne pas chômer.

En observant la demande de service, on se rend compte que la plupart des clients aiment se coiffer pendant le week-end (période de pointe) alors que le lundi, la demande est quasi-nulle (lundi). Dans la même journée, il y a des périodes de pointe et des périodes creuses.

[3] Principal Ouvrage de référence : BRABB Georges J., ***Introduction to Quantitative Management***, Holt, Rinehart and Winston, New York
[4] (Cf. publicité de l'Hôtel MIVA : «Aussitôt venu, aussitôt servi»)

De plus, le temps nécessaire pour coiffer deux personnes n'est pas le même ; deux coiffeurs n'ont pas non plus la même habileté ou qualification (*skill*)

Les caractéristiques se complètent par :

(5) le **taux des arrivées** : comment de personnes arrivent par unité de temps pour demander le service ?
(6) le **temps d'attente** : pendant combien de temps une personne attend-elle avant d'être servie (temps d'attente dans la file + temps du service)
(7) le **temps de service** (le temps que prend strictement la coiffure en excluant l'attente préalable)
(8) le **taux d'utilisation du service** : le rapport entre l'utilisation effective du service et la disponibilité dudit service

1.2 - Autres exemples

Les exemples sont nombreux. Nous attendons dans les files pour la coiffure, l'achat de tickets aux guichets, les inscriptions, pour manger au Restau U., dans les feux de circulation routière (*feux rouges*), devant une toilette ou une cabine téléphonique, au cabinet du médecin, attente de trouver un organe pour une greffe, etc.

Mais il n'y a pas que les hommes (ou les êtres vivants dont les animaux) qui attendent ; les choses aussi : courrier en attente d'être traité (lu, corrigé, dactylographié, etc.), machine en attente de réparation, tâches en attente d'être traitées par un ordinateur (*batch job processing*), document en attente d'être imprimés (*spooler*), avions attendant leur tour pour atterrir sur un aéroport surchargé, etc.

Exemples à fournir par les étudiants :
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-
-

 © 1996 - Magloire LANHA

1.3 - La taille optimale de service

Le temps d'attente a un coût et en général, on n'aimerait pas attendre. Ce temps d'attente peut être réduit en augmentant le nombre de stations de service (nombre de cabine téléphonique ou de cabine W-C), ou en augmentant leur puissance (une imprimante 12 pages par minute au lieu de 6 pages par minute, des routes plus larges, des canaux à hauts débits, une dactylographe plus qualifiée, un cadre plus performant pour l'étude des dossiers en attente).

Toutes ces solutions ont également un coût plus élevé que le statu quo. Par surcroît, après l'augmentation de capacité, on peut tomber dans un sur-dimensionnement de l'équipement avec un taux d'utilisation des ressources plus faible donc moins de rentabilité.

Le sous-dimensionnement entraîne des coûts d'opportunité : clients découragés qui abandonnent ou vont se faire servir chez les concurrents, mauvaise publicité ou mauvaise réputation de l'établissement, etc. toutes choses qui nuisent à son chiffre d'affaires et compromettent sa survie.

Il convient donc de déterminer la taille optimale du service. Cette taille est évidemment dynamique et devra suivre l'évolution de la demande sachant que dans certains domaines il est très difficile de réduire une capacité installée (infrastructures routières).

1.4 - Résumé [5]

Il y a phénomène d'attente, chaque fois qu'un certain nombre d'unités appelés ***clients*** se présente d'une manière ***aléatoire*** afin de recevoir un ***service***, d'une durée aléatoire, de la part d'autres unités appelées ***stations***.

Lorsque le nombre de clients et de stations est tel que les clients doivent attendre avant de se faire servir, il se forme une ***file d'attente***.

Un système d'attente est dit ouvert : lorsque le nombre de client n'a pas une limite connue. (Patients au cours d'une matinée au cabinet du médecin, la demande quotidienne de journaux dans un kiosque, etc.)

Un système est dit fermé lorsque le nombre est fixé et connu et est limité. (Etudiants dans un bus attendant dans la file de sortie, défilé militaire, etc.)

[5] Référence : AZOULAY P., DASSONVILLE P., Recherche Opérationnelle de Gestion, Collection Themis Gestion, Presses Universitaires de France (PUF), Paris, Tome 2 : Recherche opérationnelle en environnement incertain

La file d'attente est l'ensemble des clients qui attendent d'être servis à l'exclusion de ceux qui sont en train de se faire servir. Par contre, ***le système d'attente*** comprend tous les clients présents.

Le temps d'attente est le temps total dépensé depuis l'arrivée dans la file à la sortie de la station après avoir été servi. Par contre, ***le temps de service*** est le temps strict que dure le service.

Les clients arrivent de manière aléatoire. Nous verrons que la loi des arrivées peut être ajustée par certaines lois statistiques bien connues. Ils doivent recevoir un service à l'une des stations ; pour cela ils peuvent constituer plusieurs files d'attente séparées (une par station), ou une file unique.

Il est parfois possible de changer de file. On peut aussi trouver des cas où certains clients sont prioritaires. Enfin, tout habitué d'une administration sait qu'il faut parfois faire la queue d'abord à une station puis ensuite à une autre... C'est ce que l'on appelle le problème des *files d'attente sérielles*.

Nous dirons donc que l'attente obéit à une règle qui est fixée arbitrairement et qui s'impose au client (celui qui serait tenté de l'oublier se voit rapidement rappelé à l'ordre par un sonore « faites la queue comme tout le monde »).

Les clients arrivent donc de manière aléatoire, font la queue selon une règle d'attente pour recevoir de la part des stations un service qui est lui-même d'une durée aléatoire, dont la loi peut être ajustée par une loi statistique connue.

Le problème étant ainsi posé, quelles sont les questions qui peuvent intéresser le client, ou l'organisateur du système? En d'autres termes, quels sont les éléments qui vont caractériser notre système d'attente.

Le client pourra se demander :

1) Combien de temps va-t-il attendre en moyenne dans la queue ?
2) Quelle probabilité a-t-il d'attendre pendant plus d'un temps t ?
3) Combien va-t-il trouver de clients avant lui (surtout s'il s'agit d'une queue devant une salle de cinéma) ?

Le chapitre suivant tentera de répondre à ces questions dans le cas d'une seule station de service.

 © 1996 - Magloire LANHA

Chapitre 2 : Modèle de file d'attente avec une station

Il existe une infinité de modèles de file d'attente. Les modèles se différentient par leurs hypothèses. Plus les hypothèses sont simplificatrices, plus la résolution du modèle est facile ; plus le modèle est réaliste (et souvent sophistiqué) plus la résolution est difficile. Parfois il n'existe pas de solution générale ou académique. C'est pourquoi dans ce cours nous nous intéressons à un modèle de base dont les solutions sont connues.

2.1 - Hypothèses du modèle

H1 - Les arrivées sont aléatoires et indépendantes

Arrivées aléatoires : à tout instant il peut y avoir une arrivée ou non. Les arrivées ne sont pas prévisibles selon une règle déterministe. On ne sait pas s'il y aura une arrivée dans l'unité de temps suivante ou non

Arrivées indépendantes : Les arrivées se sont pas corrélées. Le fait qu'une personne soit arrivée ne nous donne pas une information sur une arrivée ou non l'unité de temps suivante (Δt) infiniment petite (dt).

<u>Contre exemples de la non corrélation</u>
- Les arrivés des étudiants à un guichet d'admission se font en grappe (arrivée des bus).
- Les appels téléphoniques sont plus denses en cours de semaine par rapport au week-end.
-
-
-
-
-
-
-
-

Quand cette hypothèse n'est pas vérifiée dans une étude, il faut découper le modèle en périodes plus ou moins homogènes.

<u>Exemple de découpage</u>
- Les lundis, les mardis, etc. ...
- 8 h à 10h , de 10h à 12h, etc.
- La consultation des tarifs de téléphone montre les groupes homogènes tels qu'ils sont perçus par l'OPT et/ou tels que l'OPT voudrait les endiguer.

H2 - La population des clients est infinie

Il s'agit d'une hypothèse technique nécessaire pour dériver la loi de Poisson. La plupart des phénomènes réels ne peuvent être ajustés à une loi théorique que grâce à une hypothèse de répétition infinie (cf. cours de statistique : variable de Bernoulli et loi Binomiale).

Sous ces deux hypothèses, la distribution des arrivées suit une loi de Poisson

H3 - Une seule station de service

Les solutions suivantes sont établies uniquement pour le cas d'une seule station. Pour plusieurs stations, la solution est moins évidente.

H4 - Règle de service : First-In First-Out

Les clients sont servis selon la règle du premier arrivé, premier servi. Sans cette hypothèse, il y aurait une anarchie et les temps moyens dérivés ci-après n'auraient plus de sens.

Des modèles avec priorité existent (première et deuxième classes), mais n'ont pas de solution facile.

H5 - Aucun client arrivé ne se décourage et ne sort de la file avant d'avoir été servi !

Il s'agit d'une hypothèse très forte mais dont la nécessité est évidente dans le modèle. Dans les cas de contre exemple, cela fausse les formules des calculs ci-après, d'où la nécessité de cette hypothèse de construction.

Exemple validant l'hypothèse : obligation de se vacciner contre une maladie grave.

Contre exemple : les étudiants qui quittent la file d'attente du Restau U. pour aller dormir ou étudier ou se nourrir auprès des concurrent du Restau U.

Re-formulation de l'hypothèse : Le modèle ne prend en compte que les clients qui arrivent et que ne quittent qu'après avoir été servi. Les autres ne sont pas pris en compte dans le taux d'arrivée.

2.2 - Notations du modèle

2.2.1 - Le taux moyen de service μ

Le taux de service est le nombre de personnes pouvant être servies en une unité de temps.

Exemple : John COIFFURE peut prendre en **moyenne 6 clients par heure.**
μ = 6 personnes / heure $\Leftrightarrow$ μ = 1 personne / 10 minutes.

2.2.2 - Le taux moyen des arrivées λ

Le taux moyen des arrivées et le nombre de personne arrivant en moyenne en une unité de temps. Au regard de l'hypothèse H5, λ ne prend en compte que les clients qui arrivent et que ne quittent qu'après avoir été servi.

Exemple : 4 clients arrivent par heure à John COIFFURE .
λ = 4 personnes / heure $\Leftrightarrow$ λ = 1 personne / 15 minutes

NOTE : Il faut faire attention à l'unité et rapporter tous les paramètres du modèle à la même unité de temps.

2.3 - Solutions du modèle

2.3.1 - Le nombre moyen d'arrivée dans l'intervalle de temps t

2.3.1.1 - Rappel de la formule de Poisson

La probabilité pour que la variable X suivant une loi de Poisson de paramètre λ prenne une valeur particulière n dans l'unité de temps où est exprimée λ est :

$$\boxed{P(X=n) = e^{-\lambda} . \lambda^{n} / n\,!}$$

L'espérance mathématique E(X) = λ et la variance V(X) = λ.

Attention : n et λ doivent être exprimés dans la même unité de temps : l'heure, la minute etc. C'est pourquoi la formule se note plus généralement :

$$\boxed{P(X= n \text{ dans l'intervalle de temps } t) = e^{-\lambda t} . (\lambda t)^{n} / n\,!}$$

(n étant le nombre de réalisation dans l'intervalle de temps t.)

2.3.1.2 - Applications

Le nombre moyen d'arrivée dans une unité de temps : $P(X=n) = e^{-\lambda} . \lambda^{n} / n\,!$

Exemple 1 : Déterminer la probabilité pour qu'il arrive 7 personnes une 1 heure chez John COIFFURE.
λ = 4 personnes / heure. Ramenons le problème à l'heure. λ = 4/h et t=1 heure = > λt = 4/h * 1 h = 4

$P(X=7) = e^{-4} . 4^{7} / 7\,! = 0.0595403626$

La probabilité pour qu'il arrive 7 personnes en 1 heure chez John COIFFURE est de 5.95 % [6]

NOTE POUR LES CANDIDATS
1 - Aucune table n'étant autorisée à cet examen, les candidats doivent apprendre à manipuler efficacement une calculatrice scientifique et en disposer à l'examen.   ***2 - D'autre part, il faut exécuter le calcul d'un trait sans reporter les réponses intermédiaires sur papier sinon une trop forte imprécision se glisse dans le résultat, ce qui peut induire en erreur dans la décision.***   ***3 - En outre, les réponses doivent être encadrées et expliquées dans le langage courant.***

Exemple 2 : Déterminer la probabilité pour qu'il arrive 2 personnes un quart d'heure chez John COIFFURE. L'unité de temps est ici le quart d'heure (15 minutes)
λ = 4 personnes / heure $\Leftrightarrow$ λ = 1 personne / 15 minutes. Ramenons le problème au ¼ heure. λ =1 / ¼ h et t = ¼ heure = > λt = 1 / ¼ h * ¼ h = 1

P(X=2 en ¼ heure) = $e^{-1} . 1^{2} / 2\,! = 0.1839397206$

La probabilité pour qu'il arrive 2 personnes en ¼ d'heure chez John COIFFURE est de 18.39 %

2.3.2 - La distribution du temps entre deux arrivées et du temps de service

[6] Nous utilisons dans ce cours le point décimal à la place de la virgule à cause des calculatrices scientifiques courantes. On peut utiliser la virgule comme symbole de décimal mais il ne faut pas mélanger les deux notations.

Il est souvent préférable de décrire la loi des arrivées par la distribution du temps entre deux arrivées dite distribution des inter-arrivées.

2.3.2.1 - Loi exponentielle (négative)

Lorsque les arrivées sont distribuées selon une loi de Poisson, les inter-arrivées sont distribuées selon la **loi exponentielle (négative)** dont la densité de probabilité est :

$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t}$, avec $E(t) = 1/\lambda$ et $V(t) = 1/\lambda^2$ (pour t=1)

L'intervalle de temps moyens entre deux arrivées est évidemment l'inverse du nombre de personne qui arrivent par unité de temps : $E(t) = 1/\lambda$.

De même, la distribution du temps de service suit une loi exponentielle négative de densité $g(t) = \mu\, e^{-\mu t}$ où μ représente le nombre moyen de clients servis par unité de temps. Le temps moyen du service est évidemment l'inverse du nombre de personne servi par unité de temps : $E(t) = 1/\mu$. $V(t) = 1/\mu^2$ (pour t=1)

2.3.2.2 - Probabilité que l'intervalle entre deux arrivées soit supérieure à t

La probabilité pour que l'intervalle de temps séparant deux arrivées successives soit **supérieure** à une valeur t est égale à la probabilité de n'observer aucune arrivée dans l'intervalle de temps t , d'où :

$P(I \geq t) = P(X= 0 \text{ dans l'intervalle de temps } t) = e^{-\lambda t} . (\lambda t)^{\mathbf{n}} / n ! = e^{-\lambda t} . (\lambda t)^{\mathbf{0}} / 0 ! = e^{-\lambda t}$

$$\boxed{P(I \geq t) = e^{-\lambda t}}$$

Exemple : Quelle est la probabilité qu'entre 11h et 11h15 minutes il n'y ait aucune arrivée chez John COIFFURE ?

t=15 minutes. Retenons l'unité de temps comme étant ¼ d'heure : t=1. Il faut rapporter λ à 15 mn. λ = 4 personnes / heure $\Leftrightarrow$ λ = 1 personne / 15 mn pour t=1

$P(I \geq t) = e^{-\lambda t} = P(I \geq 1) = e^{-1} = \mathbf{0.3678794412}$

La probabilité pour qu'entre 11h et 11h15 mn il n'y ait aucune arrivée chez John COIFFURE est de 36.79 %

Note : Cette probabilité est valable pour n'importe quel intervalle de 15 minutes.
C'est la probabilité pour que l'intervalle de temps séparant deux arrivées successives soit **supérieure** à 15 minutes.

2.3.2.3 - Probabilité que l'intervalle entre deux arrivées soit comprise entre deux bornes

On traduit le problème en une conjonction de deux événements indépendants par hypothèse dont le produit des probabilités donne la réponse désirée :

$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$

La probabilité pour que le temps entre deux arrivées soit compris entre deux bornes données **a** et **b (avec b>a)** est obtenue en multipliant la probabilité de **zéro** arrivée jusqu'au moment **a** (soit l'intervalle de longueur **a**) par la probabilité d'avoir au **moins une** d'arrivée ($\geq$ 1 arrivée) au moment **b** (soit l'intervalle de longueur **b**). L'arrivée (ou les arrivées) a (ont) dû se produire dans l'intervalle (**b-a**).

$P(X= n \text{ dans le temps } t) = e^{-\lambda t} . (\lambda t)^{\mathbf{n}} / n !$

$P(X=0 \text{ dans le temps } a) = e^{-\lambda a} . (\lambda a)^{\mathbf{0}} / 0 ! = e^{-\lambda a}$

$P(X \geq 1 \text{ dans le temps } a) = 1 - P(X=0 \text{ dans le temps } a) = 1- e^{-\lambda a}$

(probabilité complémentaire)

On en déduit en changeant la variable a par (b-a) :

$P(X \geq 1 \text{ dans le temps } b\text{-}a) = 1 - P(X=0 \text{ dans le temps } b\text{-}a) = 1- e^{-\lambda(b-a)}$

L'événement qu'il y ait au moins une arrivée pendant l'intervalle de temps (b-a) équivaut à la conjonction de deux événements indépendants par hypothèse : personne n'est arrivé jusqu'à l'instant a et quelqu'un (au moins) est arrivé à l'instant b, i.e. dans l'intervalle (b-a), d'où : $P(a \leq I \leq b) = P(X=0 \text{ dans le temps } a) * P(X \geq 1 \text{ dans le temps } b\text{-}a)$.

$P(a \leq I \leq b) = e^{-\lambda a} * [1- e^{-\lambda(b-a)}] = e^{-\lambda a} * [1- e^{(-\lambda b+\lambda a)}] = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda a -\lambda b +\lambda a} = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$

$$\boxed{P(a \leq I \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$$

Exemple : Quelle est la probabilité qu'il arrive un client chez John COIFFURE en dix ou douze minutes ?

a = 10 mn b = 12 mn λ = 4 personnes / heure

Nous devons rapporter toutes ces valeurs à une unité commune : l'heure par exemple.

a = 1/6 heure b = 1/5 heure λ = 4 personnes / heure

$P(a \leq I \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} = P(1/6 \leq I \leq 1/5) = e^{-4/6} - e^{-4/5} = \mathbf{0.0640881549}$

La probabilité pour qu'il arrive un client chez John COIFFURE entre 10 et 12 minutes est de 6.41 %

 © 1996 - Magloire LANHA

2.3.3 - Le taux d'utilisation des facteurs ou du service

C'est le rapport entre le taux d'arrivée sur le taux de service exprimés dans une même unité de temps.

$$\tau = \lambda / \mu$$

Le taux d'utilisation de John COIFFURE est : $\tau = \lambda / \mu$ = 4 arrivées par heures / 6 servis par heure = 4/6 = 2/3 = 0.66667 = 66.67%

John COIFFURE utilise deux tiers de sa capacité soit un taux d'utilisation de 66.67%

Note : Si le taux d'utilisation est supérieur à 1, il y aura un engorgement, la file s'accroissant indéfiniment. Une hypothèse complémentaire du modèle est que $\lambda / \mu < 1$

τ indique également le nombre moyen de client en train d'être servi à tout instant

2.3.4 - Le nombre moyen de personne en attente dans le système à n'importe quel moment, y compris la personne qui est en train d'être servie

$$E(x_s) = \lambda/(\mu - \lambda)$$

Application à John COIFFURE : $E(x_s) = \lambda/(\mu - \lambda) = 4/(6-4) = 4/2 = 2$

Chez John COIFFURE, le nombre moyen de personnes que l'on peut trouver à tout moment dans le salon y compris la personne qui est en train d'être coiffée est 2 clients.

2.3.5 - Le nombre moyen de personne en attente dans le système à n'importe quel moment, excepté la personne qui est en train d'être servie

$$E(x_w) = \lambda^2 / \mu(\mu - \lambda) = \tau\, E(x_s) = E(x_s) - \tau$$

Application à John COIFFURE :
- Formule 1 : $E(x_w) = \lambda^2 / \mu(\mu - l) = 4^2/6(6-4) = 16/12 = 4/3 = 1.33$ clients
- Formule 2 : $E(x_w) = \tau\, E(x_s) = 2/3 * 2 = 4/3 = 1.33$ clients
- Formule 3 : $E(x_w) = E(x_s) - \tau = 2 - 2/3 = 4/3 = 1.33$ clients

La formule 3 découle d'une identité :

Nombre moyen de personne dans la file = Nombre moyen de personne dans le système - Nombre moyen de personnes en train d'être servie.

(Rappelons que le taux d'utilisation du service τ **est également le nombre moyen de client en train d'être servi à tout instant)**

Chez John COIFFURE, le nombre moyen de personnes que l'on peut trouver à tout moment dans la file d'attente excepté la personne qui est en train d'être coiffée est 1.33 clients.

2.3.6 - Le temps moyen dépensé par un client dans le système (y compris le temps de service)

$$E(t_s) = 1/(\mu - \lambda)$$

Application à John COIFFURE : $E(x_s) = 1/(\mu - \lambda) = 1/(6-4) = 1/2 = 0.5$ heures soit 30 minutes.

Le temps moyens dépensé par un client Chez John COIFFURE (y compris le temps de service) est de 30 minutes.

2.3.7 - Le temps moyen dépensé par un client dans le système (excepté le temps de service)

$$E(t_w) = \lambda / \mu(\mu - \lambda) = \tau\, E(t_s) = E(t_s) - 1/\mu$$

Application à John COIFFURE :
- Formule 1 : $E(t_w) = \lambda / \mu(\mu - \lambda) = 4/6(6-4) = 4/12 = 1/3$ heure soit 20 minutes
- Formule 2 : $E(t_w) = \tau\, E(t_s) = 2/3 * 1/2 = 1/3$ heure soit 20 minutes
- Formule 3 : $E(t_w) = E(t_s) - 1/\mu = 1/2 - 1/6 = 3/6 - 1/6 = 2/6 = 1/3$ heure soit 20 minutes

La formule 3 découle d'une identité :

Temps dépensé dans la file = Temps dépensé dans le système - Temps de service
(Rappelons que le temps moyens de service $E(t_s) = 1/\mu$)

Le temps moyens dépensé par un client Chez John COIFFURE (excepté le temps de service) est de 20 minutes.

<u>Résumé</u> : en <u>moyenne</u>, un client qui arrive chez John COIFFURE, espère y trouver 2 clients en attente avant son arrivée, sera obligé d'attendre 20 minutes dans la file pour avoir ses cheveux coupés pendant en moyenne 10 minutes supplémentaires ; il ne ressortira en moyenne que 30 mn après son entrée.

 © 1996 - Magloire LANHA

2.3.8 - La probabilité pour que le nombre de client dans le système excède un nombre donné

$$\boxed{P(x_s > n) = (\lambda/\mu)^{n+1} = (\tau)^{n+1}}$$

Application à John COIFFURE : Probabilité pour que le nombre de personnes en attente dans le système soit supérieur à 3 :
$P(x_s > 3) = (4/6)^{3+1} = (2/3)^4$ = **0.1975308642**

La probabilité pour que le nombre de personnes en attente dans le système soit supérieur à 3 chez John COIFFURE est de 19.75%

2.4 - Exercices d'entraînement

2.4.1 - Loi de Poisson

Sachant que le nombre moyen de communications téléphoniques reçues par un «standard» entre 10 h et 11h est 1,8 par minute, calculer la probabilité pour qu'entre 10:53 et 10:54, il y ait :
- aucun appel
- 1 appel
- au moins 2 appels
- plus de deux appels
- 2 ou 3 ou 4 appels.

2.4.2 - Loi de Poisson

On admet que le nombre de défauts sur le verre d'une ampoule de télévision obéit à une loi de Poisson de paramètre λ=4.
Calculer la probabilité des événements suivants :
- Il n'y a aucun défaut sur l'ampoule
- Il y a plus de 2 défaut sur l'ampoule
- Le nombre de défaut est compris entre 3 et 7 (bornes incluses).

2.4.3 - Files d'attente

Le terminal principal de la Société des Transports Interurbains est localisé à GrandVille. La société emploie un agent de réservation qui s'occupe uniquement des réservations de la clientèle. Si un appelant demande une réservation ou des informations sur une possible réservation, la standardiste transfert l'appel à l'agent de réservation. Si l'agent est occupé, la standardiste met l'appel en attente. Quand l'agent est enfin libre, la standardiste lui branche la première personne en attente. On suppose que :
- les appels suivent une loi de Poisson de paramètre λ = 15 appels par heure
- le temps de service suit une loi exponentielle avec un temps moyen de service 3 minutes.

1 - Quel est le taux d'utilisation (*utilization factor*) de l'agent ?
2 - Quel est le temps moyen d'attente d'un appelant avant d'être mis en contact avec l'agent de réservation ?
3 - Quelle est la longueur moyenne de la file d'attente, (i.e. le nombre moyen de personnes en attente d'être mis en communication avec l'agent de réservation) ?

 © 1996 - Magloire LANHA

2.4.4 - File d’attente

M. Jean X a ouvert un salon de coiffure sous l'enseigne «JOHN Coiffure». En 1996, il avait un seul fauteuil de service. Les clients arrivent à un rythme aléatoire. Le modèle de service chez «JOHN Coiffure» est «le premier-venu, premier-servi», (*chacun à son tour chez le coiffeur*). Quoique les têtes n'aient pas les mêmes besoins de raffinement, M. Student T., un étudiant en maîtrise, après avoir étudié une centaine de cas, propose un temps moyen de service de 10 minutes par client. Les cas de coupure de barbe sont isolés et ne sont pas étudiés par le jeune chercheur. D'après ses statistiques, Student remarque qu'en moyenne 4 clients entrent dans le salon en 1 heure.

- Quelle est la loi des arrivées ?
- Quelle est la probabilité de voir 7 clients arriver en 1 heure ?
- Quelle est la loi des inter-arrivées ?
- Quelle est la probabilité pour que deux arrivées soit séparées par une durée de 10 à 12 minutes ?
- Définir et calculer μ, le taux d'utilisation (*utilization factor*). Que se passerait-il si on avait $\mu > 1$? Quelle est *a priori* la valeur optimale de μ ?
- Donner l'expression et calculer

* le nombre moyen de personnes en attente dans le salon à tout moment (y compris le client en train d'être servi).
* le nombre de client dans la file d'attente (excepté donc celui qui est en train d'être coiffé)
* le temps moyen dépensé par un client dans le système (y compris le temps de service)
* le temps moyen dépensé par un client dans la file d'attente (excepté donc le temps de service)
* la probabilité que le nombre de personnes en attente dans le système soit supérieur à 2,5 clients.

2.4.5 - File d’attente

Les arrivées des clients au poste de vente de la firme **Grande Société S.A**. suivent une loi de Poisson avec un temps moyen des inter-arrivées de 5 minutes. Les temps de service suivent la loi exponentielle avec une moyenne de 3 minutes. A son arrivée, le client tire un numéro séquentiel et s'installe à sa guise ; il n'y a donc pas de file physique. Les clients sont servis par appel de leur numéro ; il y a donc une file logique. Déterminez :
a - le nombre moyen de personnes en attente dans la file à tout moment (y compris le client en train d'être servi).
b - le nombre de clients dans la file d'attente (excepté donc celui qui est en train d'être servi)
c - le temps moyen dépensé par un client dans la file d'attente (excepté le temps de service)
d - le temps moyen dépensé par un client dans le système (y compris le temps de service)
e - la probabilité pour que le nombre de personnes en attente dans le système soit supérieur à 5 clients.

2.4.6 - File d’attente

Au restaurant universitaire de la **Nouvelle Université**, il n'y a qu'un seul poste de service et une seule serveuse. Les étudiant(e)s forment une file physique d'attente et sont servi(e)s dans leur ordre dans la file. Il y règne une discipline légendaire librement consentie par les futurs leaders de la **Nouvelle Société** ; aucune personne ne se fait servir en dehors de la file.

Les arrivées suivent une loi de Poisson de paramètre $\boldsymbol{\lambda = 3}$ étudiant(e)s par minute. Le temps de service suit une loi exponentielle avec un temps moyen de service 18 secondes.
1 - Quel est le taux d'utilisation (*utilization factor*) du service ?
2 - Quel est le temps moyen d'attente qu'un(e) étudiant(e) fait dans la file avant qu'on ne commence à le(la) servir ?
3 - Quelle est la longueur moyenne de la file d'attente, (i.e. le nombre moyen d'étudiant(e)s en attente hors celui(celle) qui est en train d'être servi(e) ?
4 - Quelle est la probabilité pour que le nombre d'étudiant(e)s en attente dans le système soit supérieur à 10 ?
5 - A quelle condition mathématique élémentaire, la "légendaire discipline librement consentie" risque-t-elle d'être soumise à rude épreuve ?

2.4.7 - File d’attente

Les lettres arrivent au Pool Central de Sténo-Dactylographie de la firme **Grande Société S.A**. de manière aléatoire à un taux de 8 par heure. Un(e) sténodactylo peut traiter en moyenne 3 lettres par heure. Combien de sténodactylo **Grande Société S.A**. devrait avoir si la politique de la firme est de ne pas faire attendre une lettre pour plus de 30 minutes avant qu'un(e) sténodactylo ne commence son traitement ?

© 1996 - Magloire LANHA

Titre 5 : Gestion des stocks

Chapitre 1 : Notions de base

Le stockage est utile pour éviter à l'entreprise la discontinuité de ses opérations de production et de vente. Une rupture de stock de matière première ou de produit semi-fini est source de blocage de la production et de coûts fixes. Une rupture de stock de produit fini est source de perte de chiffre d'affaires.

On pourrait penser donc que l'objectif du gestionnaire de stock est d'assurer le stock maximum pour l'entreprise. Mais le stock a plusieurs coûts. Un très grand stock est source d'immobilisation de capitaux, entraîne des frais de stockage, de gardiennage, des risques de péremption ou d'obsolescence, etc.

Le problème du gestionnaire des approvisionnements et de concilier deux tendances opposées : maximiser la quantité en stock et minimiser le coût de stockage. Ce problème est classique en économie ; il s'agit d'**optimiser le stock.**

1.1 - Différents concepts de stock

Les vocables pour désigner les différents concepts de stocks varient d'un auteur à un autre. Dans ce cours, nous distinguerons :
- le stock délai
- le stock de sécurité
- le stock d'alerte
- le stock moyen.

1.1.1 - Le stock délai : s_d

C'est le stock dont l'écoulement correspond au délai d'approvisionnement (d).

$$\boxed{s_d = d * \text{taux de consommation}}$$

Exemple : La firme MAGIX

L'entreprise MAGIX fabrique le produit IX à partir de la matière STOCKIX. Sa consommation annuelle est de 1800 kg de matière STOCKIX achetée au prix de 40 F. Le délai d'approvisionnement est de 2 mois ; la marge de sécurité est de 1 mois, la cadence de consommation est régulière.

Taux de consommation ou cadence de consommation = 1800 kg par an
En prenant le mois comme unité de temps, il vient :
t=1800 kg/12 mois = 150 kg/mois.

Délai de réapprovisionnement : temps qui s'écoule entre le lancement de la commande et la réception : d = 2 mois
Stock délai : s_d = d * t = 150 kg/mois x 2 mois = 300 kg

$$\boxed{s_d = 300 \text{ kg}}$$

1.1.2 - Le stock de sécurité

C'est le stock dont l'écoulement correspond au temps nécessaire pour faire face à tout aléa de livraison de la commande. Il ne doit normalement pas être entamé.

$$\boxed{s_s = \text{taux de consommation} * a}$$

avec a : délai de marge de sécurité

Exemple : La firme MAGIX
L'entreprise MAGIX considère que les aléas de livraison ne peuvent dépasser 1 mois.

$$\boxed{s_s = 150 \text{ kg/mois} * 1 \text{ mois} = 150 \text{ kg}}$$

1.1.3 - Le stock d'alerte

C'est le niveau de stock au niveau duquel, il faut immédiatement passer commande.
Stock d'alerte = Stock délai + stock de sécurité.

$$\boxed{s_a = s_d + s_s}$$

Exemple : La firme MAGIX

$$\boxed{s_a = s_d + s_t = 300 \text{ kg} + 150 \text{ kg} = 450 \text{ kg}}$$

1.1.4 - Le stock moyen

Le stock moyen est la moyenne arithmétique des stocks au cours de l'année. Il se calcule selon le nombre de données disponibles et peut se calculer en quantité comme en valeur.

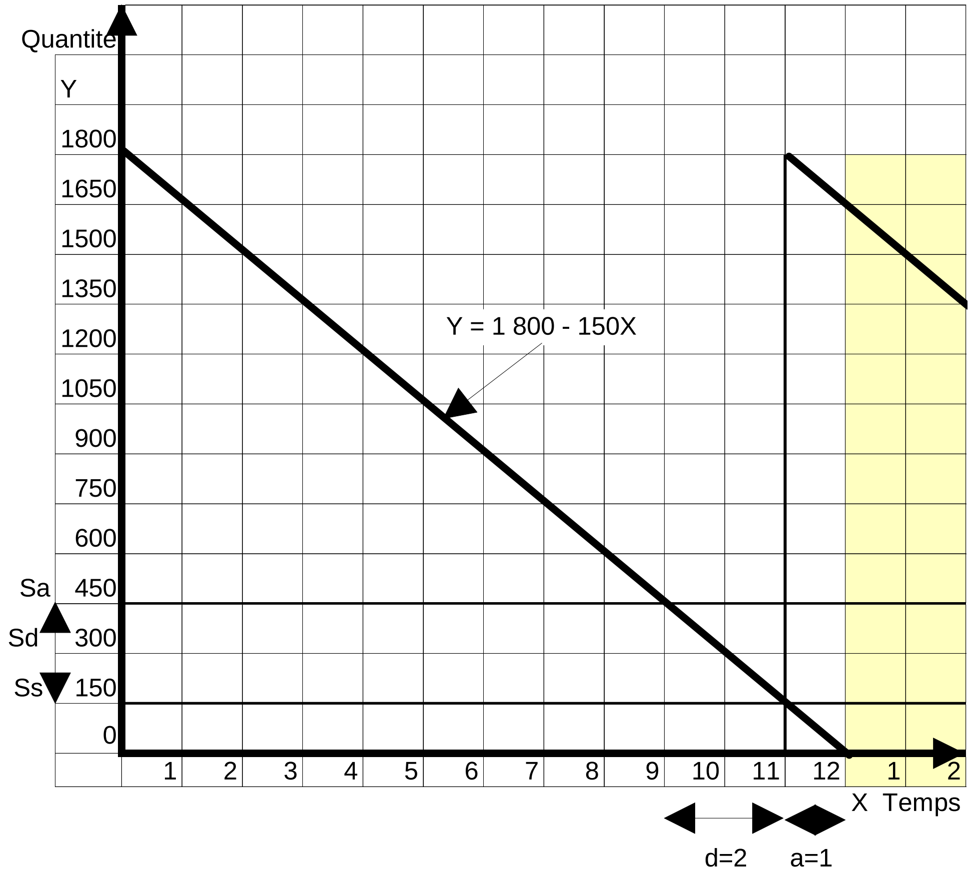
Exemples :

 © 1996 - Magloire LANHA

Stock moyen = (Stock initial + Stock final) / 2

Stock moyen = (Stock Maximum + Stock Minimum) / 2

1.1.5 - Représentation graphique des différents concepts sur une base annelle



1.2 - Les coûts relatifs au stock

Ces coûts sont de deux sortes :
- les coûts de stockage : Γ_1
- les coûts de rupture ou de pénuries : Γ_2

Le coût total des stocks est :

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

1.2.1 - Les coûts de stockage

Le coût de stockage comprend :
- le coût annuel de passation de commandes : Γ_c
- le coût annuel de détention des stocks : Γ_d

Le coût total de stockage est :

$$\Gamma_1 = \Gamma_c + \Gamma_d$$

1.2.1.1 - Le coût annuel de passation des commandes : Γ_c

- Coût des opérations administratives
* tenue des stocks : manuelle ou sur ordinateur
* rapprochement inventaire physique et inventaire théorique
* passation de la commande : enveloppe, timbre, secrétariat, ...
*
*
*

- Coût des opérations physiques
* réception des commandes
* contrôle de qualité, de conformité

*
*

1.2.1.2 - Le coût annuel de détention des stocks : Γ_d

- intérêt de l'argent immobilisé :
* financement sur le crédit bancaire
* autofinancement : coût d'opportunité sur les capitaux immobilisés

- coût d'obsolescence

Obsolescence = vieillissement technologique.

On appelle «rossignols», les produits déclassés : bien invendables destinés à être bradés voire détruits, articles obsolètes, démodés (out-of-date), dont la clientèle ne veut plus ou qui sont inutilisables car périmés, rouillés, avariés.

 © 1996 - Magloire LANHA

- coût d'assurance :
* risques de vol
* risques d'incendie
* risques d'inondation
* risque de dégâts des eaux (par les fenêtres ou les canaux par exemple)
* pollution : par produits chimiques, atomiques, bruits, etc.

- coût fiscal : impôt sur le capital dans certains régimes

1.2.2 - Les coûts de rupture ou de pénurie

1.2.2.1 - Définition et conséquence

Ce sont essentiellement des coûts d'opportunité.

En ce qui concerne **la distribution** peut citer :
- manque à gagner = vente perdue
- perte de clientèle déçue
- détérioration de l'image de marque
- paiement éventuel de pénalités de retard ou de non livraison
-
-
-

En ce qui concerne **la production,** on peut citer :
- blocage de la production
- coût de chômage des ateliers
- détérioration de produits complémentaires disponibles
-
-
-
-

1.2.2.2 - Mesure et estimation du taux de rupture

Comme tout coût d'opportunité, la mesure du coût de pénurie est délicate, voire subjective. On peut retenir toutefois deux statistiques :
- le taux de rupture τ_r

τ_r = Nombre d'unités manquantes / Nombre d'unités demandées
τ_r = Nombre d'échéance non respectées / Nombre total d'échéance
- le taux de service τ_s

$$\boxed{\tau_s = 1 - \tau_r}$$

Exemple MAGIX.
La demande de produit IX au cours de l'année est de 6000 unités. La demande satisfaite est de 4800 unités.

$\tau_s = 4800 / 6000 =$ 80 %
$\tau_r = (6000 - 4800) / 6000 = 1200 / 6000 =$ 20 %

$\tau_s + \tau_r =$ 100 %

1.2.2.3 - Estimation du coût de rupture

Hypothèse sur le coût de rupture : le coût de rupture R constant et déterminé grâce à une évaluation moyenne sur plusieurs années. En conséquence le coût de rupture est :

$$\boxed{\Gamma_2 = \tau_r * R}$$

Chapitre 2 : Formalisation du coût de gestion de stockage

2.1 - Le modèle

Il s'agit de minimiser le coût total de stock :

$$\boxed{\mathbf{\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2}}$$

où
Γ_1 : les coûts de stockage
Γ_2 : les coûts de rupture ou de pénurie.

Le modèle considère qu'il n'y a pas de coût de rupture : $\mathbf{\Gamma_2} = 0$. En effet, le modèle devrait éviter la rupture. L'objectif revient donc à minimiser les coûts de stockage

$$\boxed{\mathbf{\Gamma_1 = \Gamma_c + \Gamma_d}}$$

où
$\mathbf{\Gamma_c}$: le coût annuel de passation de commandes
$\mathbf{\Gamma_d}$: le coût annuel de détention des stocks :

© 1996 - Magloire LANHA

Soients :

v : le coût variable unitaire par commande
C : la consommation annuelle en quantité
Q : la quantité à commander (N fois dans l'année)
C/Q = N : le nombre de commande à passer au cours de l'année

$\boxed{\Gamma_c = vC/Q = vN}$: le coût annuel de passation

Soients :

t : le taux de possession du stock exprimé pour 1 F par an.
Exemple t = 0.1 = 10% : il coûte 10 F de stocker 100 F de marchandises en 1 an

P : prix (unitaire) du bien
P = f(Q) : le prix est fonction des quantités achetées (économies d'échelles, remise et ristournes). Wilson fait l'hypothèse simplificatrice de P = constant.

Le Stock moyen : (Stock Maximum + Stock Minimum) / 2
Ici le Stock Maximum = QP : la commande à chaque période. On refait le plein.
Le Stock minimum est nul; Le modèle considère que le stock de sécurité est nul.
En conséquence,: Stock moyen valeur = (QP + 0) / 2.

$$\boxed{Sm = QP/2}$$

Le coût de stockage annuel est : $\Gamma_d = t * Sm = t\,QP/2$

$$\boxed{\Gamma_d = t\,QP/2}$$

Il s'agit de trouver le lot économique à commander i.e. la quantité Q qui minimise le coût annuel

$$\boxed{\mathbf{\Gamma_1(Q) = \Gamma_c(Q) + \Gamma_d\ (Q)}}$$

$$\boxed{\mathbf{\Gamma_1(Q)} = vC/Q + tQP/2}$$

En abandonnant l'indice Γ_1 l'objectif devient :

$$\boxed{\text{Min } \Gamma\ \mathbf{(Q) =} vC/Q + tQP/2}$$

2.2 - Solution du modèle : Méthode du lot économique à commander

Le problème revient à un problème d'optimisation **sans contrainte**.

2.2.1 - Condition de 1er ordre

$\Gamma'(Q) = - vC/Q^2 + tP/2 = 0$

$v\,C/Q^2 = tP/2$
$Q^2 = 2\,vC/tP$

$$Q = \sqrt{\frac{2vC}{IP}}$$

2.2.2 - Condition de 2nd ordre

$\Gamma'(Q) = - vC/Q^2 + tP/2 = - \alpha Q^{-2} + \beta$ avec $\alpha > 0$
$\Gamma''(Q) = +2\,\alpha Q^{-3} > 0$ lorsqu'il est défini.

Γ''(Q) > 0 : l'optimum déterminé par la condition de 1er ordre est un minimum.

2.3 - Solution du modèle : Méthode du nombre de commandes à passer

Le problème revient à un problème d'optimisation sans contrainte.
Rappel : C/Q = N : le nombre de commande à passer au cours de l'année
=> Q = C/N. En remplaçant Q par sa valeur dans Γ, il vient :

$$\text{Min } \Gamma\ (N) = vN + t(C/N)P/2$$

$$\boxed{\text{Min } \Gamma\ (N) = vN + tCP/2N}$$

2.3.1 - Condition de 1er ordre

$\Gamma'(N) = v - tCP/2N^2 = 0$
$v = tCP/2N^2$
$N^2 = tCP/2v$

$$N = \sqrt{\frac{ICP}{2v}}$$

2.3.2 - Condition de 2nd ordre

$\Gamma'(N) = v - tCP/2N^2 = \beta - \alpha N^{-2}$ avec $\alpha > 0$
$\Gamma''(N) = +2\,\alpha N^{-3} > 0$ lorsqu'il est défini.

Γ''(N) > 0 : l'optimum déterminé par la condition de 1er ordre est un minimum.

© 1996 - Magloire LANHA

Chapitre 3 : Gestion du stock d'un produit

Les formules établies au chapitre précédent ont donné lieu au calcul du lot économique à commander en supposant une consommation régulière dans le temps. En fait, l'activité est souvent irrégulière; ce chapitre fait l'application des différents modèles d'irrégularité.
A - Une seule commande annuelle - cadence constante
B - Plusieurs commandes - cadence variable - quantités constantes
C - Plusieurs commandes - quantité variable - période régulière

3.1 - Enoncé

Extrait de Charles KOUPHIN, Magloire LANHA, Manuel d'entraînement en Comptabilité Analytique, Université Nationale du Bénin, Cotonou, 1991.

THEME : ETUDE ECONOMIQUE ET BUDGETAIRE DES APPROVISIONNEMENTS
- Stocks minimum, de sécurité et d'alerte, graphe.
- Nombre optimal de commandes, lot économique à commander
- Budget des approvisionnements :
  - quantités constantes
  - période régulière

L'entreprise MAGIX fabrique le produit IX à partir de la matière STOCKIX. Sa consommation annuelle est de 1800 kg de matière STOCKIX achetée au prix de 40 F. Elle étudie les trois options d'approvisionnement pour l'année 1990.

OPTION A

MAGIX lance une seule commande par an.

Sachant que le délai d'approvisionnement est d = 2 mois, la marge de sécurité s = 1 mois et en supposant que la consommation est régulière sur toute l'année 1990,

A.1 : Calculer Sm, le stock minimum s'écoulant du lancement de la commande à sa réception.

A.2 : Calculer Ss, le stock de sécurité ou niveau du stock à la réception de la commande.

A.3 : Calculer Sa, le stock d'alerte ou niveau du stock au lancement de la commande.

A.4 : Représenter graphiquement ces données.

N.B. On se contentera de calculer et de représenter ces stocks en quantité.

OPTION B

La cadence de consommation est supposée constante pendant l'année de 360 jours. Pour minimiser son stock maximum et les frais de stockage de la matière STOCKIX, la firme MAGIX envisage de fractionner la consommation annuelle en plusieurs commandes. Elle doit alors supporter des coûts de passation (ou d'acquisition) d'une commande de 150 francs. Le coût de stockage (ou de possession) est de 6 francs par an par kg de matière stockée. Calculer :

B. 1: N le nombre de commande à effectuer par an
B. 2: Lot économique à commander en quantité (Lq) et en valeur (Lv)
B. 3: La cadence d'approvisionnement.

N.B. Les questions de la série B pourraient être traitées dans un ordre différent de celui proposé.

OPTION C

En fait l'activité de MAGIX est saisonnière et la cadence de consommation irrégulière qui en résulte se présente ainsi (en kg)

Jan. 150,0	Fév. 112,5	Mar. 187,5
Avr. 187,5	Mai. 150,0	Jun. 150,0
Jul. 112,5	Aoû. 37,5	Sep. 150,0
Oct. 187,5	Nov. 187,5	Déc. 187,5

Les commandes sont toujours lancées en fin de mois. Le délai d'approvisionnement est de deux mois. Les réceptions se font le dernier jour du mois précédent celui où le stock de sécurité de 150 kg risque d'être entamé. Le nombre annuel de commande est 6. Le stock de matière STOCKIX au 31.12.89 est de 412,5 kg.

Présenter (a) la fiche prévisionnelle de stock et (b) le budget des approvisionnements dans les deux cas suivants :

C.1 : les quantités commandées sont constantes.

C.2 : les commandes sont effectuées par intervalles réguliers de temps et couvrent exactement la consommation nécessaire entre deux réceptions.

 © 1996 - Magloire LANHA

3.2 - Corrigé

OPTION A

SM : Stock Maximum
Sm : Stock minimum
Sa : Stock d'alerte
Ss : Stock de sécurité

A - 1 :

$$Sm = \frac{\text{Consommation annuelle}}{\text{Année (mois)}} \times d \text{ (mois)} = \text{Cadence de consommation} \times d$$

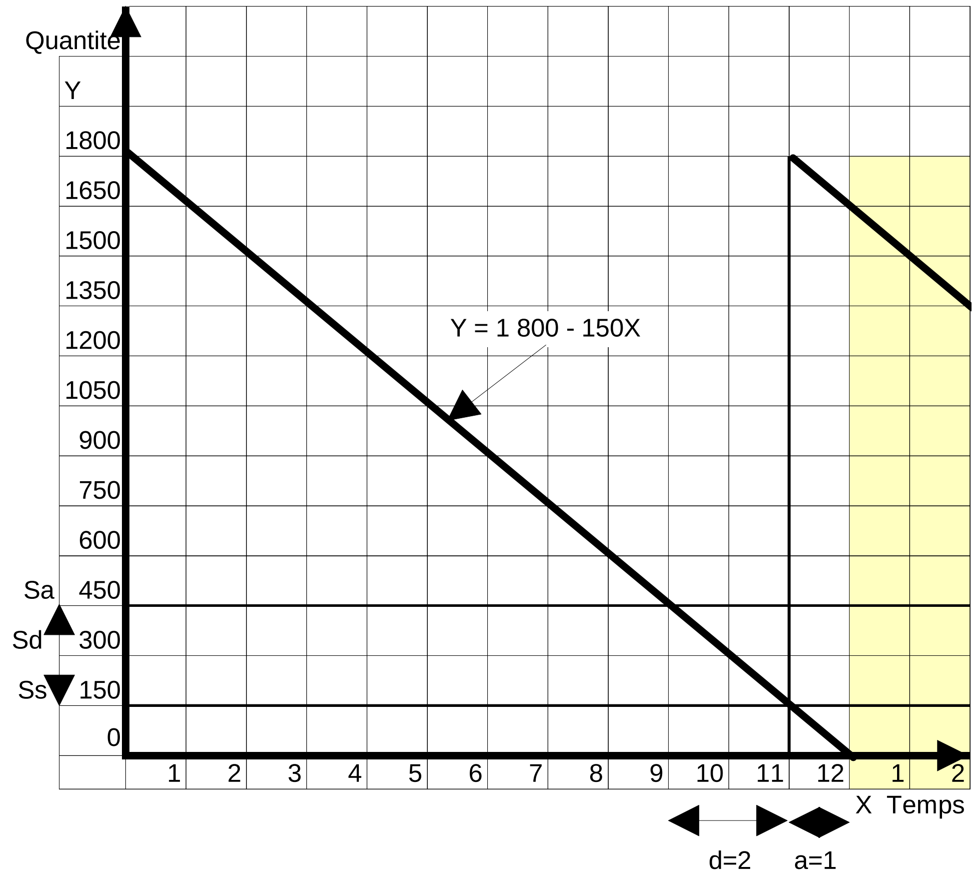
$$Sm = \frac{1\ 800 \text{ kg}}{12 \text{ (mois)}} \times 2 \text{ (mois)} = 150 \text{ kg / mois} \times 2 \text{ mois} = 300 \text{ kg}$$

A - 2 :Ss = Cadence de consommation x s = 150 kg / mois x 1 mois = 150 kg

A - 3 :Sa = Sm + Ss = 300 kg = 450 kg
Autre formule : Sa = Cadence x (d + s) = 150 kg / mois x (2 + 1) mois
Sa = 150 kg / mois x (2 + 1) mois = 150 kg / mois x 3 mois = 450 kg

A - 4 Représentation graphique des données

GRAPHE



OPTION B

B.1 Nombre annuel de commandes

$$N = \sqrt{\frac{tCP}{2v}}$$ (formule de WILSON) où

N	:	Nombre annuel de commandes
t	:	Coût de stockage de 1 F de matière par an
C	:	Consommation annuelle en quantité
P	:	Prix unitaire
CP	:	Consommation annuelle en valeur
v	:	Coût variable unitaire d'acquisition d'une commande.

t = 6 F par an pour 1 kg de matière valant 40 F

$$t = \frac{6\text{ F}}{40\text{ F}} = 0{,}15 \quad (\text{soit } 15\ \%)$$

Soit C : consommation annuelle en quantité (C = SM)
CP = 1 800 kg x 40 F / kg = 72 000 F
v = 150 F

$$N = \sqrt{\frac{0{,}15\ x\ 72\,000}{2\ x\ 150}} = \sqrt{36} = 6$$ commandes par an

Remarque La formule de WILSON s'écrit aussi

$$N = \sqrt{\frac{t.C.P}{200v}}$$ où t est exprimé pour 100 F / an.

B.2 Lot économique à commander

- en quantité $$Lq = \frac{C}{N} = \frac{1\,800\text{ kg}}{6} = 300\text{ kg}$$

- en valeur $$Lv = \frac{C.P}{N} = \frac{72\,000\text{ F}}{6} = 12\,000\text{ F}$$

(Lv = Lq . P = 300 * 40 = 12 000)

B.3 Cadence d'approvisionnement

$$r = \frac{\text{Année (jours)}}{N} = \frac{360\text{ jours}}{6} = 60\text{ jours} = 2\text{ mois}$$

La cadence est e 300 kg tous les deux mois.

Remarque : Les questions de l'option B peuvent être traitées dans un autre ordre si l'on emploie une autre formule .

Exemple

$$LV = \sqrt{\frac{2vCP}{t}}$$; on en déduit $$Lq = \frac{Lv}{P}$$

puis $$N = \frac{Q}{Lq}$$ et enfin $$r = \frac{Année}{N}$$

Application

(1) Lv = $$\sqrt{\frac{2\ x\ 150\ x\ 72.000}{0{,}15}} = \sqrt{44.000.000} = 12.000\,F$$

(2) $$Lq = \frac{12.000}{40} = 300\,kg$$

(3) $$N = \frac{1.800}{300} = 6$$ commandes par an

(4) soit une cadence de 300 kg tous les deux mois.

© 1996 - Magloire LANHA

OPTION C

C.1 Quantités constantes :

$$Lq = \frac{1.800 \text{ kg}}{6} = 300 \text{ kg.}$$

C.1 a - Fiche prévisionnelle de stock (kg)

Périodes	Sorties (consom-mations)	Stocks restant (sans réception)	Réception (fin de mois)	Stocks rectifié (avec réception)	Date de lancement de la commande reçue en fin du mois courant
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Déc. 89		412.5	-	412.5	
Jan. 90	150.0	262.5	-	262.5	
Fév. 90	112.5	150.0	300.0	450.0	Fin Déc. 89
Mar. 90	187.5	262.5	300.0	562.5	Fin Jan. 90
Avr. 90	187.5	375.0	-	375.0	
Mai. 90	150.0	225.0	300.0	525.0	Fin Mar. 90
Jun. 90	150.0	375.0	-	375.0	
Jul. 90	112.5	262.5	-	262.5	
Aoû. 90	37.5	225.0	300.0	525.0	Fin Jun 90
Sep. 90	150.0	375.0	-	375.0	
Oct. 90	187.5	187.5	300.0	487.5	Fin Aoû. 90
Nov. 90	187.5	300.0	300.0	600.0	Fin Sep. 90
Déc. 90	187.5	412.5	-	412.5	
Total 1990	**1 800.0**	//////////////////////	**1 800.0**	//////////////////////	//////////////////////////////////

<u>Algorithme de construction du tableau</u>

1 - On remplit d'abord les colonnes (1) et (2) selon l'énoncé.

2 - La colonne (3) = (5) du mois précédent - (2) du mois courant

3 - La colonne (5) = (3) du mois courant + (4) du mois courant.

4 - Selon l'énoncé, la réception - colonne (4) - a lieu en fin de mois. La colonne (4) étant comprise dans la colonne (5), celle-ci masque des ruptures en cours de mois. En conséquence, seule la colonne (3) est pertinente pour déterminer le risque de rupture de stock ou d'entamer le stock de sécurité en cours de mois.

5 - Si (3) risque d'être inférieur strictement au stock de sécurité (150 kg), il faut qu'on ait réceptionné une nouvelle commande à la fin du mois précédent : colonne (4) qui a dû être lancée deux mois plus tôt : colonne (6) en quantité constante (4) = 300 kg.

<u>Remarque 1</u> : Dans les conditions définies par l'épreuve, le stock final doit être égal au stock initial (412,5 kg)

<u>Remarque 2 :</u> Les inconnues à déterminer sont les dates lancement des commandes et accessoirement les dates de réception.

<u>Remarque 3</u> : Autre présentation possible du tableau de fin de mois.

Périodes	Stocks en début de mois	Sorties (consom-mations)	Stocks final (sans réception)	Stock - Besoin du mois suivant	Réception (fin de mois)	Stocks rectifié (avec réception)	Date de lancement de la commande reçue en fin du mois courant
(A)	(B)	(C)	(D)	(E)	(F)	(G)	(H)
Déc. 89			412.5		-	412.5	
Jan. 90	412.5	150.0	262.5	150.0	-	262.5	
Fév. 90	262.5	112.5	150.0	- 37.5	300.0	450.0	Fin Déc. 89
Mar. 90	450.0	187.5	262.5	75.0	300.0	562.5	Fin Jan. 90
Avr. 90	562.5	187.5	375.0	225.0		375.0	
Mai. 90	375.0	150.0	225.0	75.0	300.0	525.0	Fin Mar. 90
Jun. 90	525.0	150.0	375.0	262.5		375.0	
Jul. 90	375.0	112.5	262.5	225.0	-	262.5	
Aoû. 90	262.5	37.5	225.0	75.0	300.0	525.0	Fin Jun 90
Sep. 90	525.0	150.0	375.0	187.5		375.0	
Oct. 90	375.0	187.5	187.5	-	300.0	487.5	Fin Aoû. 90
Nov. 90	487.5	187.5	300.0	112.5	300.0	600.0	Fin Sep. 90
Déc. 90	600.0	187.5	412.5	- 1 387.5		412.5	
Total 1990	////////////////////	**1 800.0**	//		**1 800.0**	////////////////////	//////////////////////////////////

L'algorithme est le suivant :

A(t) et C(t) sont exogènes (données de l'épreuve)
B(t) = G(t-1)
D(t) = B(t) - C(t)
E(t) = D(t) - C(t+1)
Si E(t) < 150 (stock de sécurité) alors
  F(t) = 300 (quantité constante)
Sinon
  F(t) = 0 (pas de réception)
Fin de Si E(t) < 150 (stock de sécurité) alors
G(t) = D(t) + F(t)

<u>Remarque 4</u> : Si les commandes et réceptions avait lieu en début de mois, le travail serait plus simple.

 © 1996 - Magloire LANHA

C.1.b Budget des approvisionnements.

Mois	Stock Initial	Reception (fin de mois)	Sorties	Stock final	Budget de commande en fin de mois
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Déc. 89		-		16 500	12 000
Jan. 90	16 500	-	6 000	10 500	12 000
Fév. 90	10 500	12 000	4 500	18 000	-
Mar. 90	18 000	12 000	7 500	22 500	12 000
Avr. 90	22 500	-	7 500	15 000	-
Mai. 90	15 000	12 000	6 000	21 000	-
Jun. 90	21 000	-	6 000	15 000	12 000
Jul. 90	15 000	-	4 500	10 500	-
Aoû. 90	10 500	12 000	1 500	21 000	12 000
Sep. 90	21 000	-	6 000	15 000	12 000
Oct. 90	15 000	12 000	7 500	19 500	-
Nov. 90	19 500	12 000	7 500	24 000	-
Déc. 90	24 000	-	7 500	16 500	12 000
Total 1990	**/////////////////**	**72 000**	**72 000**	**///////////////**	**72 000**

N.B. Le Budget est toujours valorisé. Les quantités déterminées par la fiche prévisionnelle de stock ont été multipliées par le prix de 40 F/kg.

Algorithme de construction du tableau

1 - On remplit d'abord les colonnes (1) , (4) et (3) à partir de la fiche de stock (valorisation).

2 - La colonne (5) = (2) + (3) - (4) de la ligne courante.

3 - La colonne (2) = (5) de la ligne précédente .

4 - La colonne (6) est remplie en se servant de la colonne (6) de la fiche de stock mais en réintégrant les dates de lancement de commande sur la ligne du mois correspondant .

C.2 Périodes régulières de lancement des commandes.

C.2.a Fiche prévisionnelle de stock

Résumé de l'algorithme

Les principes exposés dans le cas C.1.a restent valables à une exception près : au moment même où le stock de sécurité (150 kg) devrait être atteint (fin du mois M), une commande lancée deux mois plus tôt (fin du mois M-2) couvrant exactement la consommation des deux mois suivants (M+1 et M+2) est réceptionnée.

Périodes	Sorties (consom-mations)	Stocks restant (sans réception)	Réception (fin de mois)	Stocks rectifié (avec réception)	Date de lancement de la commande reçue en fin du mois courant
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Déc. 89		412.5		412.5	
Jan. 90	150.0	262.5	-	262.5	-
Fév. 90	112.5	150.0	375.0	525.0	Fin Déc 89 = Mar+Avr 90
Mar. 90	187.5	337.5	-	337.5	-
Avr. 90	187.5	150.0	300.0	450.0	Fin Jan 90 = Mai+Juin 90
Mai. 90	150.0	300.0	-	300.0	-
Jun. 90	150.0	150.0	150.0	300.0	Fin Avr90 = Jul+Aoû 90
Jul. 90	112.5	187.5	-	187.5	-
Aoû. 90	37.5	150.0	337.5	487.5	Fin Jun 90 = Sept+Oct 90
Sep. 90	150.0	337.5	-	337.5	-
Oct. 90	187.5	150.0	375.0	525.0	Fin Aoû = Nov+Déc 90
Nov. 90	187.5	337.5	-	337.5	-
Déc. 90	187.5	150.0	262.5	412.5	Fin Oct90 = Jan+Fév 91
Total 1990	**1. 800**	**///////////////////**	**1. 800**	**///////////////////**	**//////////////////////////////////////**

Remarque

On fait l'hypothèse que les consommations de Jan et Fév 91 sont égales à celles de Jan. et Fév. 90. Cette hypothèse est implicite dans C.1.a.

© 1996 - Magloire LANHA

C.2.b Budget des approvisionnements.

Mois	Stock Initial	Reception (fin de mois)	Sorties	Stock final	Budget de commande en fin de mois
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Déc. 89		-		16 500	15 000
Jan. 90	16 500	-	6 000	10 500	
Fév. 90	10 500	15 000	4 500	21 000	12 000
Mar. 90	21 000	-	7 500	13 500	-
Avr. 90	13 500	12 000	7 500	18 000	6 000
Mai. 90	18 000	-	6 000	12 000	-
Jun. 90	12 000	6 000	6 000	12 000	13 500
Jul. 90	12 000	-	4 500	7 500	-
Aoû. 90	7 500	13 500	1 500	19 500	15 000
Sep. 90	19 500	-	6 000	13 500	
Oct. 90	13 500	15 000	7 500	21 000	10 500
Nov. 90	21 000	-	7 500	13 500	-
Déc. 90	13 500	10 500	7 500	16 500	15 000
Total 1990	**/////////////////**	**72 000**	**72 000**	**///////////////**	**72 000**

<u>Résumé de l'algorithme</u>
Idem qu'en C.1.a
Fin Décembre 90 une commande est lancée analogue à celle de fin Décembre 89 soit 375 kg valant 15.000 F

 © 1996 - Magloire LANHA

TABLE DES MATIERES DU TITRE

 © 1996 - Magloire LANHA